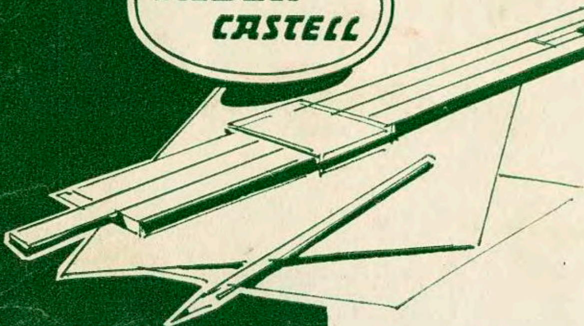
FABER-CASTELL



MATHEMA

CASTELL 2/84

DER UNIVERSAL-RECHENSTAB

SYSTEM DR.-ING. MOELLER

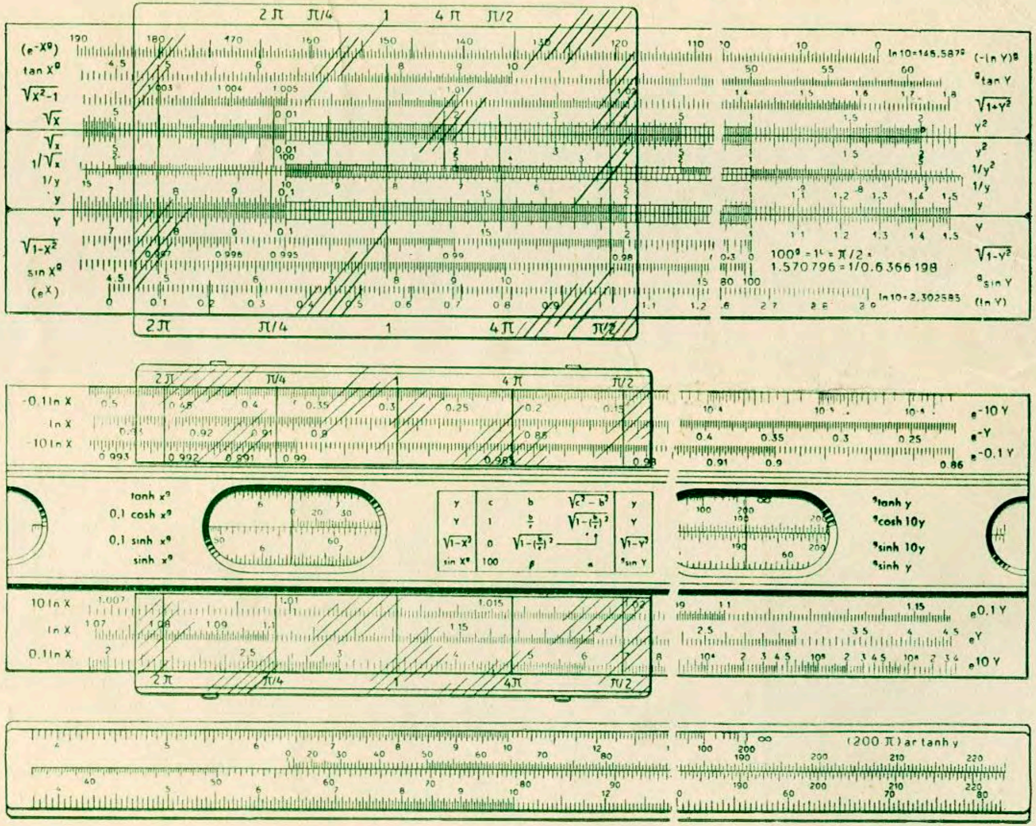
A. W. FABER-CASTELL · STEIN BEI NÜRNBERG

Der Mathema-Rechenstab CASTELL 2/84

Vorderseite

Rückseite

Schieber-
ruckseite



Inhaltsverzeichnis

A. W. FABER — CASTELL — STEIN BEI NÜRNBERG

Druckfehlerberichtigungen

Seite 11. Zeile 8 v. o. lies: $x_1 + x_2$ statt $x_1 - x_2$

Seite 17. Die ersten 5 Zeilen sind mit den darauffolgenden 10 Zeilen auszutauschen.

Seite 27. Die letzten beiden Zeilen gehören an das Ende des vorangehenden Kapitels

Seite 41. Zeile 3 v. o. lies: $|z| < \pi$

Seite 42. Zeile 5 v. u. im Nenner der 3. Spalte lies: $n + 0{,}0701$

Seite 43. Die Spalte für $\binom{n}{8}$ beginnt mit 1 statt mit 5.

Der Mathema-Stab in der neuen Ausführung besitzt eine rechtsläufige Skala $e^{X^g} \ldots\ {}^g\ln Y$

Es gelten hierfür sinngemäß die Ausführungen in der Mathema-Schrift S. 23 und 24 über die rückläufige Skala für die exponentielle Stammfunktion mit den Argumenten in Neugrad.

Die auf S. 24 und 25 angegebenen Regeln für die Stellenzahl der Ergebnisse sind durch den neuen Läufer entbehrlich geworden. Auf ihm sind nämlich die Zehnerpotenzen als Faktoren von Y vermerkt, die zu den einzelnen additiven Konstanten von X gehören.

Die S. 28 besprochene Möglichkeit, $\sinh x^g$ und $\cosh x^g$ mittels der Skala $e^{X^g} \ldots\ {}^g\ln Y$ aus den Werten $0{,}5\ e^{\pm x^g}$ zusammenzusetzen, kann beim Belassen des Schiebers in seiner Grundstellung leicht durchgeführt werden. Bei größeren Argumenten ist das Glied $0{,}5\ e^{-x^g}$ meist zu vernachlässigen, so daß man $\sinh x^g = \cosh x^g = 0{,}5\ e^{x^g}$ setzen kann und damit die Fortsetzung der sinh- und cosh-Skalen der Schieberrückseite erhält. Für die mit $0{,}5\ e^{x^g}$ zusammengesetzten Ausdrücke gilt folgendes:

Zum Ausrechnen von $f(x) : 0{,}5\ e^{x^g}$ oder von $0{,}5\ e^{x^g} : f(x)$ bringt man $y = 2$ unter den auf e^{X^g} eingestellten Läuferstrich und liest über $Y = f(X)$ auf der y- bzw. auf der 1/y-Skala ab.

Beispiel: $\sin 260^g : 0{,}5\ e^{260^g} = -0{,}02725 = -1/36{,}7$.

Zum Ausrechnen von $0{,}5\ e^{x^g}\ f(x)$ oder von $1/0{,}5 e^{x^g}\ f(x)$ bringt man $y = e^{X^g}$ bei zunächst unverstelltem Läufer über $Y = 2$ und liest dann über $Y = f(X)$ auf der y- bzw. auf der 1/y-Skala ab.

Beispiel: $0{,}5\ e^{330^g} \sin 330^g = -79{,}4 = -1/0{,}01259$.

Der logarithmische Universal-Rechenstab MATHEMA

von Dr.-Ing. Eugen Moeller, Darmstadt

Geschichte des Logarithmischen Rechenstabes

Der **logarithmische Rechenstab** verdankt seine Entstehung und Entwicklung im wesentlichen
der Aufstellung der Logarithmen durch **Jost Bürgi** (1607) und durch **Lord John Napier** (1614),
der Aufzeichnung von logarithmischen Skalen durch **Edmond Gunter** (1624),
der Verwendung eines zweiten verschiebbaren Stabes durch **Wingste** (1627),
der Anordnung zweier gleichartiger logarithmischer Stäbe durch **William Oughtred** (1630),
der Erfindung des Schiebers in einem Stabkörper durch **Seth Partridge** (1657),
der Aufstellung doppellogarithmischer Skalen durch **Roget** (1815),
der Wiedererfindung des Läufers durch **Mannheim** (1851)
und der klassischen Gemeinschaftsarbeit „Darmstadt" unter der Leitung von **Prof. Dr.Alwin Walther** (1934).

Aufbau des Mathema-Stabes

Der **Mathema-Stab** ist für die Anwendung in der praktischen Mathematik und für die mathematische Behandlung der Naturgesetze geschaffen. Zu diesem Zweck ist er mit allen elementaren Funktionsskalen so vollständig versehen, daß die Rechnungen tunlichst direkt und daher bequem und genau durchgeführt werden können. Die Anordnung der am häufigsten gebrauchten Skalen auf der Vorderseite des Stabes, die Einführung einer gemeinsamen Einheit für die Argumente der Kreis- und der Hyperbelfunktionen, die formelmäßigen Bezeichnungen der Stammfunktionen und ihrer Umkehrungen, die folgerichtigen Bezifferungen der Skalen, die großen Skalenlängen und die Marken auf dem Läufer erleichtern die Handhabung des Mathema-Stabes wesentlich.

Die **feststehende Hauptskala,** auf die alle übrigen Skalen des Stabkörpers bezogen sind, wird mit Y bezeichnet.

Die **bewegliche Hauptskala,** auf die alle übrigen Skalen des Stabkörpers bezogen sind, wird mit y bezeichnet.

Die **Stammfunktionen** sind mit f(X) oder mit f(x) bezeichnet, wenn sie auf die Hauptskala Y bzw. auf die Hauptskala y bezogen sind. Hier ist demnach wie üblich

$$Y = f(X),$$
$$y = f(x).$$

Die **Umkehrfunktionen** gehen von den Hauptskalen Y und y aus und werden mit f(Y) bzw. mit f(y) bezeichnet.

Da die Funktionen auf der **Schieberrückseite** den Bezeichnungen mit f(x) und f(y) entsprechend auf die Hauptskala y bezogen sind, so befinden sich die zum Ablesestrich an einem Fenster gehörenden Funktionswerte gegenüber auf der Hauptskala y, d. h. an den Endstrichen der feststehenden Hauptskala mit Y = 0,1 bzw. 1.

Um die Funktionen im praktisch wichtigen Bereich darstellen zu können, sind einige **Skalen in mehreren Stufen** aufgetragen.

Dem gleichen Zwecke dienen die über die Hauptdekade der Hauptskalen hinausgehenden **Skalenerweiterungen** vieler Funktionen.

Die ebenfalls über die Hauptdekade der Hauptskalen hinausgehenden **Skalenwiederholungen** einiger Funktionen machen ein Umstellen des Schiebers von einer Endlage in die andere in vielen Fällen unnötig.

Alle rechtsläufigen Skalen sind **schwarz** gefärbt. Die **rückläufigen Skalen**, das sind solche, deren Zahlenwerte auf dem Rechenstabe von rechts nach links zunehmen, sind **rot** gefärbt.

Als **gemeinsame Einheit** für die Argumente der Kreis- und der Hyperbelfunktionen, die miteinander verwandt und in den Formeln daher oft miteinander gekoppelt sind, dient der **Neugrad.** Zur bequemen Umwandlung von Neugraden in das Bogenmaß (Radiant) besitzt der Läufer Einstellmarken für den Faktor $\pi/2$ auf den Normalskalen.

Die **Kommastellungen** bei den Zahlenangaben auf dem Mathema-Stab sind **einheitlich** auf die trigonometrischen und pythagoreischen Skalen ausgerichtet; ausgenommen hiervon sind die Skalen mit eingeklammerten Funktionsausdrücken.

Die Bezeichnungen der Zahlenwerte sind zwecks guter Lesbarkeit und Übersicht kurz gehalten.

Ein **Punkt** vor oder hinter einer Ziffer bedeutet, daß dieser Ziffer so viele Dezimalnullen vorangehen bzw. so viele Nullen folgen wie die benachbarte kleinere ganzzahlige Zehnerpotenz angibt.

Die Skalen mit Ausnahme der für e^X bzw. ln Y sind **ungleichmäßig geteilt.** Insbesondere sind die Intervalle zwischen den Skalenstrichen an verschiedenen Stellen einer Skala verschieden groß. Einheiten im Dezimalsystem sind nicht immer in 10 Intervalle geteilt, sondern je nach dem Bedürfnis auch in 5 oder in 2. Die gegenseitigen Zuordnungen der Skalenwerte der verschiedenen Funktionen werden in der Regel mit dem Hauptstrich des **Läufers** hergestellt. Am linken Stabende benutzt man mit Vorteil den linken Läuferstrich, am rechten Stabende den rechten, wenn es sich nicht um die Skalen e^X bzw. ln Y handelt. Die Abstände der Läuferstriche voneinander entsprechen den Faktoren $\pi/2$, 2π, $\pi/4$ und 4π, die für die Hauptskalen am unteren und für die oberen Normalskalen am oberen Läuferrand angeschrieben sind.

Die Spalten der **Rechenbeispiele** in dieser Schrift und auf der Rückseite des Mathema-Stabes sind in der Reihenfolge der einzelnen Rechenschritte von links nach rechts geordnet und stimmen daher im allgemeinen nicht mit der räumlichen Verteilung der Größen auf den Skalen überein. Die für die Beispiele benötigten Funktionsskalen sind als teilweise Wiedergaben der Beschriftungen angegeben.

Theorie des Stabrechnens

Das Prinzip des logarithmischen Stabrechnens besteht darin, die mechanisch ausführbare **Addition und Subtraktion** von Strecken dadurch in die beiden höheren Rechenstufen zu verwandeln, daß diese Strecken Funktionsgrößen im logarithmischen Maßstab darstellen.

Man erhält **Multiplikationen und Divisionen** der natürlichen Zahlen, wenn auf den beiden zusammenzusetzenden Skalen die Logarithmen der natürlichen Zahlen aufgetragen sind. Es ist

$$\ln a + \ln b = \ln a \cdot b,$$
$$\ln a - \ln b = \ln a : b.$$

Ausgangs- bzw. Endpunkt der einfachlogarithmischen Skala ist die Zahl 1, da 1 als Faktor ohne Einfluß und $\ln 1 = 0$ ist.

Die Skalen mit den Logarithmen der natürlichen Zahlen sind **Normalskalen** des Rechenstabes; diese sind **Hauptskalen**, wenn die anderen Skalen auf sie bezogen sind.

Man erhält **Potenzen** und **Wurzeln** der natürlichen Zahlen, wenn die eine Skala eine Hauptskala und die andere eine Skala der Doppellogarithmen der natürlichen Zahlen ist. Es ist

$$\ln(\ln a) + \ln n = \ln(n \cdot \ln a) = \ln(\ln a^n),$$
$$\ln(\ln a) - \ln n = \ln({}^1/n \cdot \ln a) = \ln(\ln a^{1/n}).$$

Ausgangs- bzw. Endpunkt der doppellogarithmischen Skala ist die Basis der Logarithmen, da deren Logarithmus = 1 und da Logarithmus $1 = 0$ ist.

Die Umkehrung des Rechenvorganges liefert die **Exponenten**

$$\ln(\ln a^n) - \ln(\ln a) = \ln(\ln a^n : \ln a) = \ln n,$$
$$\ln(\ln a^{1/n}) - \ln(\ln a) = \ln(\ln a^{1/n} : \ln a) = \ln {}^1/n.$$

Die Exponenten n und 1/n sind auch die **Logarithmen** der Numeri a^n bzw. $a^{1/n}$ zur Basis a.

Im allgemeinen besteht kein Bedürfnis nach einer **Erweiterung** des Stabrechnens etwa in der Weise, daß zwei Skalen der Doppellogarithmen zueinander addiert werden nach der Beziehung

$$\ln(\ln a) + \ln(\ln b) = \ln(\ln a^{\ln b}) = \ln(\ln b^{\ln a}).$$

Es genügt, daß diese und ähnliche Rechenarten auf dem Stab mittels einfacher Schritte ausgeführt werden können.

Dagegen ist es für eine umfassende Anwendungsmöglichkeit des Rechenstabes in Mathematik, Physik und Technik von Wichtigkeit, daß die elementaren und einige andere **Funktionen** auf dem Rechenstab enthalten und den Hauptskalen zugeordnet sind. An den Funktionsskalen f(X) und f(x) können nach ihrer Projektion auf die Hauptskalen oder auf die Skala der Doppellogarithmen alle höheren Rechenoperationen vorgenommen werden entsprechend den Beziehungen:

$$\ln f(X) + \ln f(x) = \ln (f(X) \cdot f(x)),$$
$$\ln f(X) - \ln f(x) = \ln (f(X) : f(x)),$$
$$\ln (\ln f(X)) + \ln f(x) = \ln (\ln f(X)^{f(x)}),$$
$$\ln (\ln f(X)) - \ln f(x) = \ln (\ln f(X)^{1/f(x)}).$$

Auch die **Beziehungen zwischen den Funktionsskalen** sind von Bedeutung. Beim Übergang von einer Skala f(X) auf eine Skala f(Y) findet man die Funktion $f(X)_{f(y)}$, indem man die Größe Y durch die Funktion f(X) ersetzt.

Das gleiche gilt für den Übergang von einer Skala f(x) auf eine Skala f(y).

Beim Übergang von einer Skala f(X) auf eine Skala f(y) ist f(X) noch mit dem Faktor zu versehen, der gegenüber dem Endstrich $Y = 1$ auf der Hauptskala y steht.

Entsprechendes gilt für den Übergang von einer Skala f(x) auf eine Skala f(Y); der Faktor von f(x) steht gegenüber von $y = 1$ auf Y.

Mittels der Marken auf dem Läufer können beim Übergang auch π-Faktoren eingeführt werden.

Wegen der Zuordnung der Funktionsskalen zu den Hauptskalen sind sie wie diese logarithmiert. Man läßt jedoch die allgemeine Logarithmierung bei der Bezeichnung der Skalen und ihrer Zahlenangaben der Einfachheit wegen außer acht und schreibt die **Numeri** unmittelbar an den Skalenstrichen an. Der Begriff des **logarithmischen** Rechenstabes erinnert an den wahren Sachverhalt.

Die Funktionen sind auf dem Rechenstabe **kontinuierlich** enthalten. Sie sind daher bei bequemer **Interpolationsmöglichkeit** nur **mit begrenzter Genauigkeit** einstell- und ablesbar. Ist L die dem Rechenstabe zugrundegelegte Länge für die Einheit $\ln e = 1$, dann ist die Länge z der logarithmischen Strecke der Größe y

$$z = L \cdot \ln y.$$

Mit den Einstell- und Ablesefehlern usw. von der Länge Δz wird der **relative Fehler der Hauptskala** y

$$\Delta y/y = \Delta z/L;$$

er ist also konstant und von den Funktionen f(x), die etwa auf die Skala y übertragen werden, unabhängig.

Für $L = (200 \text{ mm Dekadenlänge}) / \ln 10 = 86{,}8\,..\,\text{mm}$ und $\Delta z = L/500 = 0{,}17\,..\,\text{mm}$ erhält man den relativen Fehler auf der Hauptskala y zu 2 vT.

Bei n aufeinander folgenden Multiplikationen oder Divisionen wächst der wahrscheinliche Fehler nach dem Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz auf das $\sqrt{n}$ -fache an.

Die Länge z der logarithmischen Strecke einer der Hauptskala zugeordneten Funktion f(x) ist

$$z = L \cdot \ln f(x).$$

Mit den Einstell- und Ablesefehlern usw. von der Länge Δz wird der **relative Fehler auf der Funktionsskala f(x)**

$$\Delta x/x = \Delta z\ f\ (x)\ /Lxf'(x).$$

Mit $\Delta\ z/L = 1/500$ erhält man die Fehler in vT nach folgender Tabelle:

f (x)	y = 0,01	0,1	1	10	f (y)
x		2	2		y
$^1/x$		—2	—2		$^1/y$
$^1/\sqrt{x}$		—4	—4		$^1/y^2$
$\sqrt{x}$		4	4		y^2
$\sqrt{1-x^2}$		—0,02	—∞		$\sqrt{1-y^2}$
$\sqrt{x^2-1}$		0,02	1		$\sqrt{1+y^2}$
sin x		2,03	∞		arcsin y
tan x		1,99	1,27		arctan y
sinh x		1,99	1,61	0,66	arsinh y
cosh x			∞	0,67	arcosh y
tanh x		2,03	∞		artanh y
e^x			∞	0,87	ln y
ln x	0,02	0,2	2	20	e^y

Die Skalen des Mathema-Stabes und ihre gegenseitigen Beziehungen

Die Hauptskalen Y und y und ihre Reziproke $^1/y$

Die **Dekadenabschnitte** von 0,1 bis 1 und von 1 bis 10 usw. einer logarithmischen Skala der natürlichen Zahlenreihe wiederholen sich in kongruenter Weise, denn die Logarithmen unterscheiden sich nur um die der Zehnerpotenzen. Ein Dekadenabschnitt der Hauptskalen Y und y enthält also bereits alle denkbaren Zahlenwerte, wenn man von den Stellenzahlen absieht. Man macht hiervon Gebrauch, indem man jeden Teilungsstrich für eine ganzzahlige Zehnerpotenz als **Anfangs-** bzw. **Endstrich** der Hauptskala betrachtet. Man darf demnach auch den Schieber in Bezug auf die Hauptskalen aus einer Lage in die ihr kongruente am anderen Stabende **umstellen,** um das Rechenergebnis in den passenden Bereich des Stabes zu bringen.

Die Skala $^1/y$ ist eine **rückläufige Hauptskala** gemäß der Beziehung $\ln {}^1/y = -\ln y$.

Sie erlaubt die **Umwandlung** einer Multiplikation mit a in eine Division durch $^1/a$ und umgekehrt.

Die Beziehungen zwischen den Hauptskalen Y einerseits und y und 1/y anderseits sind die der **Multiplikation** und der **Division.**

Einzelrechnungen beginne man in der Regel mit der **Bewegung des Läufers,** um nach der anschließenden Schieberbewegung das Ergebnis **innerhalb der Hauptdekade** zu erhalten und um bei längeren Ausdrücken **unmittelbar weiterrechnen** zu können.

Bei **Tabellenrechnungen** ist es angebracht, einen **Schieberendstrich** dem konstant bleibenden Ausdruck auf der Skala Y gegenüberzustellen, um entweder mittels der Skala y mit variablen Faktoren zu multiplizieren oder mittels der Skala $^1/y$ durch variable Divisoren zu dividieren.

Die **Einstellung** der Zahlen auf den Hauptskalen, die mit dem Läuferstrich oder auf den Skalen Y und y mit einem Endstrich der anderen Skala vorgenommen werden kann, geschieht unabhängig vom Komma in der Reihenfolge der Ziffern. Bei Zahlen wie 1234 ist die 4. Ziffer nur schätzungsweise einzustellen. Bei Zahlen wie 8765 kann die vierte Ziffer kaum noch genügend berücksichtigt werden.

Eine **Division** wie $2468 : 8{,}765 = 281{,}6$ erhält man, indem man den Läuferstrich auf Y = 2468 und den Schieber mit y = 8765 unter den Läuferstrich bringt; das Ergebnis findet man auf der Skala Y gegenüber einem Endstrich der Skala y.

Eine **Multiplikation** wie $234 \cdot 567 = 1327 \cdot 10^2$ erhält man, indem man den Läuferstrich auf Y = 234 und den Schieber mit $^1/y = 567$ unter den Läuferstrich bringt. Das Ergebnis findet man auf der Skala Y gegenüber einem Schieberendstrich.

Die letzten Stellen von einfacheren Quotienten und Produkten können durch Überlegung exakt angegeben werden. Mit ihnen übt man das Abschätzen der Werte zwischen den Skalenstrichen. Beispiele: $605 : 4 = 151{,}25$ $\quad 202 \cdot 3 = 606$

Die **Stellenzahl** des Ergebnisses ergibt sich aus einer überschlägigen Kopfrechnung, in unübersichtlichen Fällen nach der Abspaltung von Zehnerpotenzen. Beispiel: $246800 : 0{,}008765 = \text{rd. } 3 \cdot 10^{5+2} = 2816 \cdot 10^4$.

Mit der **abwechselnden** Benutzung von Läufer und Schieber ist **fortgesetztes** Multiplizieren und Dividieren **möglich;** man braucht dabei **keine Zwischenergebnisse** abzulesen oder Schieberendstriche auf sie einzustellen. Wenn es sich beispielsweise **nur um Faktoren** handelt, dann benutzt man außer der Skala Y die Skalen $^1/y$ und y abwechselnd. So setzt man $a \cdot b \cdot c \cdot d = a : {}^1/b \cdot c : {}^1/d$. Man findet $12 \cdot 34 \cdot 56 \cdot 78 = 1782 \cdot 10^3$. Bei Ausdrücken wie $a/bcd = a : b \cdot {}^1/c : d$ findet man $1782/(12 \cdot 34 \cdot 56) = 0{,}078$.

Im folgenden ist schematisch dargestellt, wie die möglichen Verknüpfungen zweiter Stufe der Größen a, b und c auszurechnen sind.

$^1/y$				c	b		b	c	$^1/y$
y	b	c	b			c			y
Y	a	ac/b	a	a/bc	a	abc	a	ab/c	Y

Wenn ein Faktor eines **Produktes** nahe bei 1 liegt und sehr genau bekannt ist, wie bei einigen Umkehrfunktionen auf dem Mathema-Stab, dann erzielt man beim Multiplizieren durch die **Zerlegung** des Faktors in die Zahl 1 und in die Abweichung hiervon eine erhöhte Genauigkeit. Beispiel: $0{,}9876 \cdot 543 = (1 - 0{,}0124) \cdot 543 = 543 - 6{,}73 = 536{,}27$. Andernfalls erhielte man nur den Wert 536.

Wenn ein **Quotient** aus sehr genau bekannten Gliedern nahe bei 1 liegt oder wenn die Differenz dieser Glieder genau bekannt ist, dann empfiehlt sich die **Zerlegung** ebenfalls. Beispiel: $456/455 = 1 + {}^1/455 = 1{,}002198$. Andernfalls erhielte man nur den Wert 1,002.

Gegenüber den Anfangs- und Endstrichen der Skalen Y und y stehen wechselseitig reziproke Werte. Man kann daher Brüche auch mit vertauschten Zählern und Nennern **reziprok ausrechnen**, um direkt zu den Ergebnissen zu gelangen. Diese Methode ist dann am Platze, wenn eine auf die Skala Y bezogene Stammfunktion im Nenner eines Bruches steht. Beispiel: $678 \cdot \text{cosec}\, 30^g = 1 / (\sin 30^g : 678) = 1493$, wobei $\sin 30^g = 0{,}454$ nicht abgelesen zu werden braucht. Das Ergebnis erscheint nun auf der Skala y, indem man den Läuferstrich auf $\sin 30^g$ und den Schieber mit y = 678 unter den Läuferstrich stellt.

Mittels der **Marke** $\pi/2$ auf dem Läufer können Neugrade ^{g} eines Winkels in das Bogenmaß rad verwandelt werden und umgekehrt. Es ist

$$1^g = \pi/200 \text{ rad} = 0{,}01570796 \text{ rad},$$
$$1 \text{ rad} = 200/\pi^g = 63{,}66198^g,$$
$$\pi = 3{,}1415927 = 1/\,0{,}3183099.$$

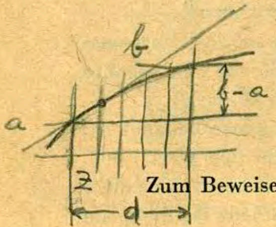
Der Faktor $\pi/2$ entspricht auf den Hauptskalen dem Abstand des mittleren Läuferstrichs, der auf dem Rande die Bezeichnung 1 hat, vom rechten Läuferstrich. Beispiele: $87{,}6^g = 1{,}376$ rad; $0{,}234$ rad $= 14{,}9^g$.

Mittels der **Marke** 2π auf dem Läufer kann bei gegebenem Radius r der Kreisumfang u eingestellt werden, denn es ist $u = 2\pi r$. Der Faktor $2\pi/10$ entspricht auf den Hauptskalen dem Abstand des mittleren Läuferstrichs, vom linken Läuferstrich. Beispiele: $u = 1234 \text{ mm} \cdot 2\pi = 7750$ mm, am linken wie am rechten Stabende einstellbar, da die Skalenwiederholungen ausreichen; $r = 4560 \text{ cm} : 2\pi = 726$ cm.

Das versteht kein Mensch

Das geht aber auch viel einfacher!

Die **lineare Interpolation** von Zahlenwerten beruht auf der genügend genauen Proportionalität zwischen den Differenzen der Argumente und den Differenzen der Funktionswerte in den geeigneten Fällen. Der Rechenstab kann hierfür in naheliegender Weise selbst dann als Hilfsmittel dienen, wenn es sich um vielstellige Tabellenwerte handelt. Für wiederholte Interpolationen zwischen der kleineren Zahl a und der größeren Zahl b, die beide nur mit Rechenstabgenauigkeit bekannt oder zugrundezulegen sind und die Argumentendifferenz d haben, eignet sich folgende Methode. Man bringt y = d über Y = b—a; dann steht der Zahl a auf der Skala Y eine Zahl c auf der Skala y gegenüber, ferner der Zahl b auf der Skala Y die Zahl c+d auf der Skala y; die auf der Skala y ersichtlichen Argumentenveränderungen, d. h. die von c oder gegebenenfalls von c+d abweichenden Beträge ergeben auf der Skala Y die zugehörigen Funktionswerte und umgekehrt. Man erhält folgendes Schema:



y	d	c	c+d	y
Y	b—a	a <	b	Y

Tangente $\frac{b-a}{d}$

Argumentzuwachs z

$\frac{b-a}{d} z + a$

= neuer Funktionswert

Zum Beweise schreibt man ausführlich

$$c = ad/(b—a)$$

$$c+d = bd/(b—a) = ad/(b—a) + d.$$

Die Größe c darf ohne wesentlichen Nachteil abgerundet werden, um das Ablesen der Argumenten-Veränderungen zu erleichtern

Beispiel: a = 456; b = 789; d = 2. Man findet c = 2,738 = rd. 2,74. Für den Argumentenzuwachs 0,234 wird der Funktionswert = 495, wenn die Argumente von a nach b zunehmen; im anderen Falle wird der Funktionswert = 750.

2,738
6,234
2,972

Die Wurzeln der **quadratischen Gleichung**

$$x^2 + ax + b = 0$$

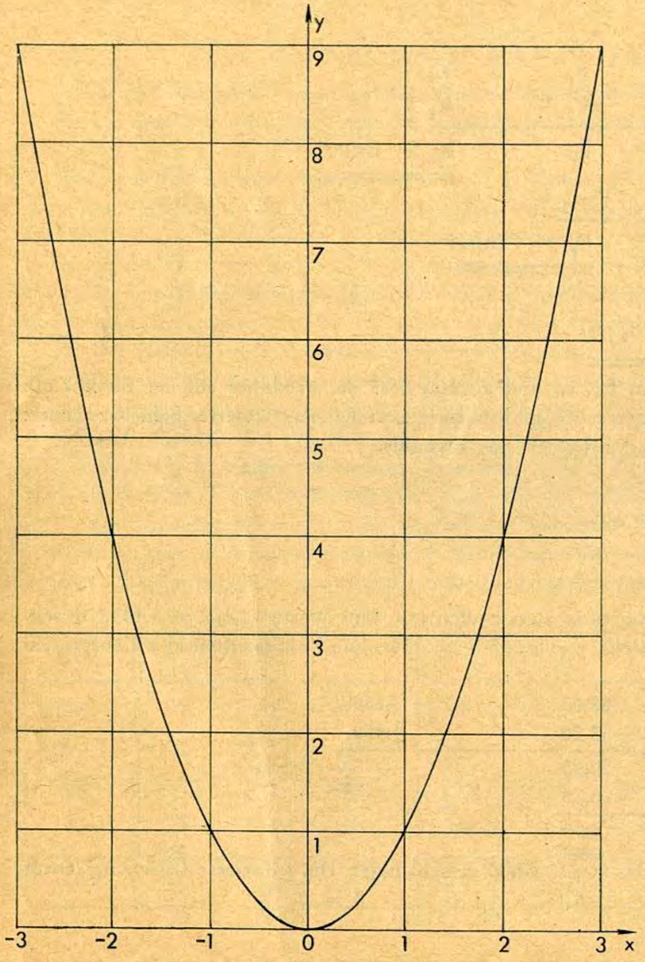
ergeben sich im Reellen aus den Abszissen der Schnittpunkte der Einheitsparabel

$$y_1 = x^2$$

und der Geraden

$$y_2 = — ax — b.$$

Das Anlegen einer Linealkante an die Parabel und ein Abschätzen genügt, wenn man die gefundenen Lösungen mit Hilfe des Rechenstabes verbessert.



Quadratische Einheitsparabel $y = x^2$

Hierzu bringt man die gegebene Gleichung in die Rechenstabform

$$x + b/x = -a$$

und stellt einen Schieberendstrich auf $Y = b$; mittels des Läuferstrichs erhält man dann von der Skala Y aus zu jedem beliebigen Werte von x die zugehörigen Werte b/x auf der Skala $^1/y$. Die Summe der beiden Werte soll $= -a$ sein, was durch Probieren erreicht werden muß.

Da die Wurzeln x_1 und x_2 dem Viëtaschen Satze gehorchen, wonach

$$x_1 - x_2 = -a$$

ist, so findet man auf dem Rechenstab die beiden Wurzeln gleichzeitig.

Beispiel: $x - 2/x = 3$; $x_1 = 3{,}56$; $x_2 = -0{,}56$.

Wenn die Gerade y_2 die Parabel y_1 nicht schneidet und die Wurzeln demnach konjugiert komplex sind, dann wendet man die auch sonst gültige Formel an:

$$x_1, x_2 = -a/2 \pm \sqrt{a^2/4 - b}$$

Die Maßzahlen der Koordinaten im beistehenden Bilde der quadratischen Einheitsparabel können als Numerierungen gelten, wenn es erforderlich ist, die Maßstäbe der Koordinaten zu verändern. Es ist dabei zu beachten, daß die Gleichung der quadratischen Einheitsparabel erhalten bleiben muß. Wenn man z. B. die Abszissenmaße verdoppelt, muß man die Ordinatenmaße vervierfachen.

Die Hauptskalen eignen sich für die Verwendung im **Hornerschen Schema** zur Bestimmung des Wertes von Gleichungen folgender Art

$$b_o = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_o$$

für einen bestimmten Wert von x. Hierzu schreibt man die Koeffizienten in eine Reihe und ergänzt das Schema schrittweise wie angegeben, wobei $b_4 = a_4$ ist, $b_3 = a_3 + b_4 x$, $b_2 = a_2 + b_3 x$ usw. Durch wiederholte Anwendung findet man $c_1 = f'(x)/1!$, $d_2 = f''(x)/2!$ usw. für den angenommenen Wert von x.

$$
\begin{array}{c|lllll}
 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\
x & & +b_4\,x & +b_3\,x & +b_2\,x & +b_1\,x \\
\hline
 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & \underline{\underline{b_0 = f(x)/0!}} \\
 & & +c_4\,x & +c_3\,x & +c_2\,x & \\
\hline
 & c_4 & c_3 & c_2 & \underline{\underline{c_1 = f'(x)/1!}} & \\
 & & +d_4\,x & +d_3\,x & & \\
\hline
 & d_4 & d_3 & \underline{\underline{d_2 = f''(x)/2!}} & &
\end{array}
$$

Man stellt einen Schieberendstrich auf $Y = x$, den Läuferstrich auf b_n, c_n und d_n und liest die Produkte auf der Skala Y ab. Wenn dabei der eine oder der andere Faktor eine Schieberumstellung verlangen sollte, multipliziert man bei unveränderter Schieberstellung mit dem verdoppelten oder mit dem halbierten Faktor und halbiert bzw. verdoppelt das Ergebnis.

Beispiel: Die kubische Gleichung

$$x^3 - 15{,}4\ x^2 + 82{,}65\ x - 150{,}7 = 0$$

wird dadurch vom quadratischen Gliede befreit, daß man

$$x = y + 15{,}4/3$$

setzt. Dies kann mit Hilfe des Hornerschen Schemas geschehen, indem man es in zwei Stufen mit dem Werte $15{,}4/3 = 5{,}1333$ durchführt, um die Koeffizienten der reduzierten Gleichung zu erhalten. Man stellt $y = 3$ auf $Y = 154$ ohne Zuhilfenahme des Läufers ein und erhält

$$
\begin{array}{c|llll}
 & 1 & -15{,}4 & 82{,}65 & -150{,}7 \\
15{,}4/3 & & +\ 5{,}133 & -52{,}70 & +153{,}7 \\
\hline
 & 1 & -10{,}267 & 29{,}95 & \underline{\underline{3{,}0}} \\
 & & +\ 5{,}133 & -26{,}35 & \\
\hline
 & 1 & -\ 5{,}133 & \underline{\underline{3{,}60}} &
\end{array}
$$

Wie ersichtlich ist, ergäbe die weitere Verfolgung des Schemas, daß das zweite Glied verschwindet. Die reduzierte Gleichung lautet

$$y^3 + 3{,}6\ y + 3 = 0.$$

Die Parabelskalen $\sqrt{X} \ldots Y^2$, $\sqrt{x} \ldots y^2$ und ihre Reziproke $1/\sqrt{x} \ldots 1/y^2$

Die Parabelskalen und ihre Reziproke sind auf dem Mathema-Stab wegen der großen Bedeutung der **Quadrate und Quadratwurzeln** in der gleichen Ausführlichkeit wie die Hauptskalen aufgenommen. Da

$$\ln \sqrt{x} = {}^1/_2 \ln x$$

ist, so liegen hier ebenfalls Normalskalen vor; ihre Teilungslängen sind halb so groß wie die der Hauptskalen. Man kann daher mit ihnen ebenso multiplizieren und dividieren wie mit den Hauptskalen und ihrer Reziproken und dabei sogar ganz ohne Schieberumstellungen auskommen, was beispielsweise beim **linearen Interpolieren** von Tabellenwerten angenehm ist; man muß aber den doppelten relativen Fehler in Kauf nehmen, wenn nicht die Wurzel aus dem Produkt oder aus dem Quotienten zu ziehen ist.

Da sowohl die Quadratwurzeln als auch die Quadrate der gewöhnlichen Zahlenreihe im Bilde Parabeln darstellen, so ist die **Parabelskala** ein Sammelbegriff für die Quadratwurzel- und Quadratskala.

Der Dekade einer Hauptskala sind **zwei Dekaden** der Parabelskala zugeordnet. Beim Wurzelziehen, was mit dem Läuferstrich oder mit einem Schieberendstrich geschehen kann, ist von der linken bzw. von der rechten Dekade auszugehen, wenn die Anzahl der Ziffern vor dem Komma oder die der Dezimalnullen hinter dem Komma ungerade bzw. gerade ist. Beispiele: $\sqrt{123} = 11{,}09$; $\sqrt{12{,}3} = 3{,}507$; $\sqrt{0{,}0123} = 0{,}1109$; $\sqrt{0{,}123} = 0{,}3507$.

Kommen in **zusammengesetzten Ausdrücken** außer den linearen Faktoren und Divisoren nur noch solche im Quadrat oder nur noch solche unter dem Wurzelzeichen vor, so sind die linearen Glieder mittels der Parabelskalen bzw. mittels der Hauptskalen zu berechnen.

Im folgenden Schema sind die Ergebnisse für den Fall dargestellt, daß man eine Größe a mittels Läuferstrichs auf der Skala Y einstellt, eine Größe b auf den angegebenen Schieberskalen unter den Läuferstrich bringt und die Resultate sowohl auf den feststehenden als auch auf den beweglichen Haupt- und Parabelskalen gegenüber den Endstrichen abliest.

$\sqrt{X}$	a^2	a^2/b^2	1	a^2	$a^2 \cdot b^2$	1	a^2	$a^2 \cdot b$	1	a^2	a^2/b	1	Y^2
$\sqrt{x}$	b^2	1	b^2/a^2	$1/b^2$	1	$1/a^2 b^2$	$1/b$	1	$1/a^2 b$	b	1	b/a^2	y^2
$1/\sqrt{x}$	$1/b^2$	1	a^2/b^2	b^2	1	$a^2 b^2$	b	1	$a^2 b$	$1/b$	1	a^2/b	$1/y^2$
$1/y$	$1/b$	1	a/b	b	1	ab	$\sqrt{b}$	1	$a\sqrt{b}$	$1/\sqrt{b}$	1	$a/\sqrt{b}$	$1/y$
y	b	1	b/a	$1/b$	1	$1/ab$	$1/\sqrt{b}$	1	$1/a\sqrt{b}$	$\sqrt{b}$	1	$\sqrt{b}/a$	y
Y	a	a/b	1	a	ab	1	a	$a\sqrt{b}$	1	a	$a/\sqrt{b}$	1	Y

Das nächste Rechenschema entspricht dem vorigen mit dem Unterschied, daß sich a auf der Skala $\sqrt{X}$ befindet.

$\sqrt{X}$	$\underline{a}$	a/b^2	1	$\underline{a}$	ab^2	1	$\underline{a}$	ab	1	$\underline{a}$	a/b	1	Y^2
$\sqrt{x}$	b^2	1	b^2/a	$1/b^2$	1	$1/ab^2$	$1/b$	1	$1/ab$	$\underline{b}$	1	b/a	y^2
$1/\sqrt{x}$	$1/b^2$	1	a/b^2	b^2	1	ab^2	$\underline{b}$	1	ab	$1/b$	1	a/b	$1/y^2$
$1/y$	$1/b$	1	$\sqrt{a}/b$	$\underline{b}$	1	$\sqrt{a}\,b$	$\sqrt{b}$	1	$\sqrt{ab}$	$1/\sqrt{b}$	1	$\sqrt{a/b}$	$1/y$
y	$\underline{b}$	1	$b/\sqrt{a}$	$1/b$	1	$1/\sqrt{a}\,b$	$1/\sqrt{a}\,b$	1	$1/\sqrt{ab}$	$\sqrt{b}$	1	$\sqrt{b/a}$	y
Y	$\sqrt{a}$	$\sqrt{a}/b$	1	$\sqrt{a}$	$\sqrt{a}\,b$	1	$\sqrt{a}$	$\sqrt{ab}$	1	$\sqrt{a}$	$\sqrt{a/b}$	1	Y

Die obere **Marke $\pi/4$** auf dem Läufer, die wie die obere Marke $\pi/2$ vom Hauptstrich $= 1$ aus zählt, ermöglicht es, den **Inhalt des Kreises** von gegebenem Durchmesser von einer Hauptskala aus auf der entsprechenden Parabelskala unmittelbar einzustellen oder in umgekehrter Reihenfolge den **Durchmesser eines Kreises** von gegebenem Inhalt. Beispiele: $\pi/4 \cdot 2345^2 = 432 \cdot 10^4$; $\sqrt{2345 \cdot 4/\pi} = 54{,}55$.

Der **Kubus** und die Quadratwurzel hieraus, ebenso die **Kubikwurzel** und das Quadrat hiervon, erscheinen bei Benutzung der Haupt- und der Parabelskalen auf feststehenden Normalskalen, so daß ein Weiterrechnen möglich ist.

In der folgenden Darstellung der Bildung der **3. Potenz** ist es gleichgültig, auf welcher Dekade der reziproken Parabelskala man die Ausgangsgröße einstellt. Bei den Quadratwurzeln hieraus sind jedoch die Dekadenregeln für das Quadratwurzelziehen schon beim Einstellen der Ausgangsgröße zu beachten, weshalb diese Ausdrücke eingeklammert sind. Beispiele: $2^{3/2} = 2{,}828$; $20^{3/2} = 89{,}4$.

Bei der Bildung der **3. Wurzel** ist die Tatsache, daß sie **durch Probieren** gefunden werden muß, durch einen Doppelstrich versinnbildlicht; die Werte auf den Skalen $1/\sqrt{x}$ .. $1/y^2$ und Y unter dem Läuferstrich müssen miteinander übereinstimmen. Es ist dabei gleichgültig, auf welcher Dekade der feststehenden Parabelskala man die Ausgangsgröße einstellt, wenn man das ungefähre Ergebnis ohnehin im voraus abschätzt, um von 3 möglichen Läuferstellungen die richtige zu wählen. Bei den Quadratwurzeln sind die entsprechenden Dekadenregeln schon beim Einstellen der Ausgangsgröße zu beachten, weshalb diese Ausdrücke eingeklammert sind.

Beispiele: $2^{2/3} = 1{,}587$; $20^{2/3} = 7{,}37$; $200^{2/3} = 34{,}2$.

$\sqrt{X}$		a^3	1	$\underline{b}$	$b^{2/3}$	1	Y^2
$\sqrt{x}$		1	$1/a^3$	1	$1/b^{1/3}$	$1/b$	y^2
$1/\sqrt{x}$	$\underline{a}$	1	a^3	1	$\underline{\underline{b^{1/3}}}$	b	$1/y^2$
$1/y$		1	$(a^{3/2})$	1	$(b^{1/6})$	$(\sqrt{b})$	$1/y$
y		1	$(1/a^{3/2})$	1	$(1/b^{1/6})$	$(1/\sqrt{b})$	y
Y	$\underline{a}$	$(a^{3/2})$	1	$\sqrt{b}$	$\underline{\underline{b^{1/3}}}$	1	Y

Die **4. Potenzen** werden mittels eines Schieberendstrichs auf der feststehenden Parabelskala eingestellt, indem man mittels des Läuferstrichs die Basis auf der Skala Y markiert und den Schieber mit der Basis auf der Skala $1/y$ unter den Läuferstrich bringt. Man hat dann in Bezug auf die feststehende Parabelskala das Quadrat der Basis ins Quadrat erhoben.

Die **4. Wurzeln** erhält man ohne Probieren durch zweimaliges Quadratwurzelziehen, wobei die entsprechenden Dekadenregeln zu beachten sind. Beispiele: $2^{1/4} = 1{,}189$; $20^{1/4} = 2{,}115$; $200^{1/4} = 3{,}760$; $2000^{1/4} = 6{,}69$.

Die Wurzeln der **reduzierten kubischen Gleichung**

$$x^3 + ax + b = 0$$

ergeben sich im Reellen aus den Abszissen der Schnittpunkte der kubischen Einheitsparabel

$$y_1 = x^3$$

und der Geraden

$$y_2 = -ax - b.$$

Das Anlegen einer Linealkante an die kubische Parabel und ein Abschätzen genügt, wenn man die gefundenen Lösungen mit Hilfe des Rechenstabes verbessert. Hierzu bringt man die gegebene Gleichung in die Rechenstabform

$$x^2 + b/x = - a$$

und stellt einen Schieberendstrich auf $Y = b$; mittels des Läuferstrichs erhält man dann von der Skala Y aus zu jedem beliebigen Werte von x^2 auf der feststehenden Parabelskala die zugehörigen Werte b/x auf der Skala $^1/y$.

$\sqrt{X}$		x_1^2	Y^2
$^1/y$		b/x_1	$^1/y$
y	1		y
Y	b	x_1	Y

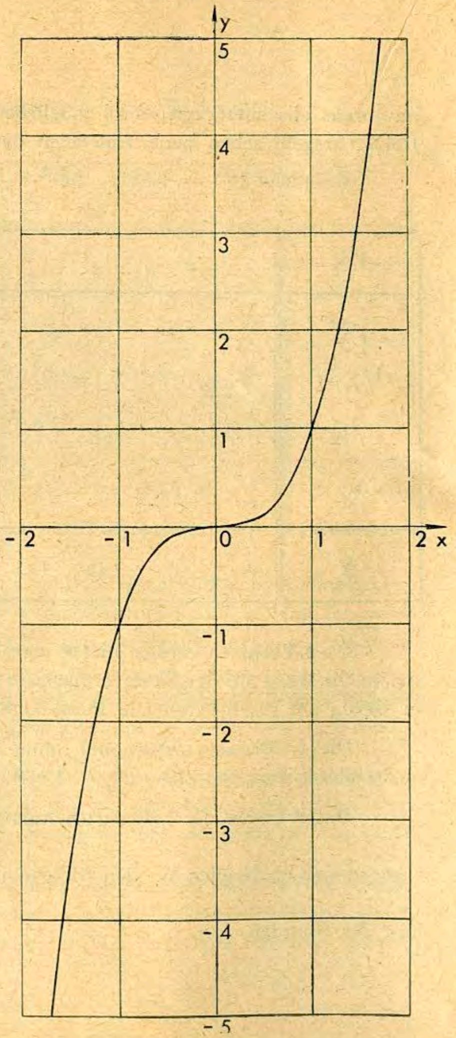
Die Summe der beiden Werte soll $= - a$ sein, was durch Probieren erreicht werden muß. Wenn man eine Wurzel x_1 kennt, findet man die beiden anderen aus

$$x_2\,,\; x_3 = - x_1/2 \pm \sqrt{- a - 3x_1^2/4},$$

was insbesondere dann erforderlich sein kann, wenn diese konjugiert komplex sind. Bei der Kenntnis von zwei Wurzeln der Gleichung erhält man die dritte gemäß dem Viëtaschen Satze aus der Ergänzung der Wurzelsumme zum negativen Koeffizienten des zweithöchsten Gliedes der Gleichung, hier also zu Null.

Beispiel: $x^3 + 3{,}6\,x + 3 = 0$; $x_1 = - 0{,}726$; $x_2, x_3 = 0{,}363 \pm 2\,i$.

Die Maßzahlen der Koordinaten im beistehenden Bilde der kubischen Einheitsparabel können als Numerierungen gelten, wenn es erforderlich ist, die Maßstäbe der Koordinaten zu verändern. Es ist dabei zu beachten, daß die Gleichung der kubischen Einheitsparabel erhalten bleiben muß. Wenn man z. B. die Abszissenmaße verdoppelt, muß man die Ordinatenmaße verachtfachen.



Kubische Einheitsparabel $y = x^3$

Bei der **quadratischen Interpolation** einer Funktion ersetzt man die Funktionskurve durch eine Parabel. Die Funktionswerte $y = f(x)$ seien für gleiche Argumentabstände bekannt, und es werde entweder zur Abszisse $x_o + \Delta x < x_1$ die Ordinate $y_o + \Delta y$ gesucht, oder es werde umgekehrt zur Ordinate $y_o + \Delta y < y_1$ die Abszisse $x_o + \Delta x$ gesucht. Der Punkt $y_o + \Delta y = f(x_o + \Delta x)$ möge nun mit ausreichender Genauigkeit auf der Ersatzparabel liegen; der gesuchte Wert kann dann durch direkte bzw. durch inverse Interpolation ermittelt werden.

Das genauere **Ausziehen der Quadratwurzel** aus der Zahl c geschieht zweckmäßig in der Form

$$\pm\sqrt{c} = \pm\sqrt{a^2 \pm R} = a \pm x,$$

indem man x mittels des Rechenstabes durch Probieren gemäß folgender Bedingung bestimmt:

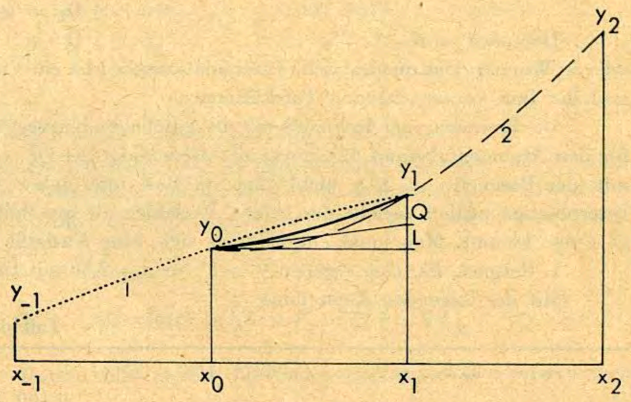
$$R : (2a \pm x) = x.$$

Dieses Verfahren kann auch nach mehreren Rechenschritten des exakten Wurzelziehens angewandt werden.

Beispiele: $\sqrt{123456} = \sqrt{122500+956} = 350+1{,}363 = 351{,}363$, denn es ist $956 : (700+1{,}363) = 1{,}363$.

$\sqrt{159876} = \sqrt{160000-124} = 400-0{,}155 = 399{,}845$, denn es ist $124 : (800-0{,}155) = 0{,}155$.

Die **Ersatzparabel** muß durch die beiden Punkte x_o, y_o und x_1, y_1 gehen. Ihre Achse soll der Einfachheit wegen parallel zur Ordinatenachse sein. Als weitere Bedingung zur Bestimmung der Parabel ist die Vorschrift geeignet, daß die Ordinaten der Ersatzparabel die arithmetischen Mittel aus den Ordinaten der Parabel 1 durch den Punkt x_{-1}, y_{-1} und der Parabel 2 durch den Punkt x_2, y_2 sein sollen.



Quadratische Interpolation

Mit dem linearen Interpolationsglied L und dem quadratischen Interpolationsglied Q ist definitionsgemäß

$$\Delta y = \frac{\Delta x}{x_1 - x_o} L + \left(\frac{\Delta x}{x_1 - x_o}\right)^2 Q$$

und

$$L = y_1 - y_o - Q.$$

Für die inverse Interpolation ergibt sich

$$\Delta x = \left(\sqrt{1 + 4\,\Delta y Q / L^2} - 1\right)(x_1 - x_o) L / 2Q.$$

Wenn der Wurzelausdruck nahe bei 1 liegt und mit den pythagoreischen Skalen nicht mehr berechnet werden kann, findet man mit der Abkürzung

$$k = \triangle y Q/L^2$$

$$\triangle x = (1 - k + 2k^2 - 5k^3 + 14k^4 - 42k^5 + 132k^6 - 429k^7 + 1430k^8 - . + . .)\,(x_1 - x_o)\triangle y/L.$$

Q_1 der Parabel 1 ergibt sich wie folgt.

$$y_o - y_1 = L_1 + Q_1$$
$$y_1 - y_{-1} = 2L_1 + 4Q_1$$
$$Q_1 = (y_{-1} - 2y_o + y_1) : 2.$$

Analog findet man Q_2 der Parabel 2 zu

$$Q_2 = (y_o - 2y_1 + y_2) : 2.$$

Demnach wird $\quad Q = ((y_2 - y_1) - (y_o - y_{-1})) : 4$

oder in Worten: Das quadratische Interpolationsglied ist ein Viertel der Differenz der dem betrachteten Intervall folgenden Tafeldifferenz und der ihm vorausgehenden Tafeldifferenz.

Die Ersatzparabel deckt sich mit der gegebenen Kurve, wenn diese eine Parabel von der Art $y = x^2$ ist; hier ist $L = 2x$ und $Q = 1$ für den Argumentabstand 1, wie aus der Gleichung $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ ohne weiteres folgt. Dagegen stimmt die Ersatzparabel mit der Parabel $y = \sqrt{x}$ nicht überein. Man muß daher vor der Aufstellung einer Zahlentafel mit vorausgesetzter quadratischer Interpolation prüfen, welche der beiden Variablen als unabhängige die größere Genauigkeit erreichen läßt, falls eine Wahl überhaupt in Frage kommt. Manchmal empfiehlt es sich, eine Variable als Reziproke anzusetzen.

1. Beispiel. Es seien gegeben $y = e^x$ für $x = 2{,}30$ mit Intervallen von 0,01. Gesucht werden y für $x = 2{,}315$ und x für $y = 10{,}12$.

Mit der folgenden Aufstellung

x	y	Tafeldiff.	Q	L
2,30	9,974 182			
		0,100 243		
2,31	10,074 425			
		0,101 249	0,000 506	0,100 743
2,32	10,175 674			
		0,102 268		
2,33	10,277 942			

erhält man $e^{2,315} = 10{,}074\,425 + 0{,}050\,371 + 0{,}000\,127 = 10{,}124\,923$, was mit dem wahren Wert übereinstimmt. Im allgemeinen stellt man $\triangle x/(x_1 - x_0)$ auf der Skala Y ein, um mit L auf der Skala y den linearen Teil und bei gleicher Schieberstellung mit

Q auf der Skala $\sqrt{x}\,..\,y^2$ den quadratischen Teil von $\triangle y$ abzulesen.
Für $y = 10{,}12$ wird $k = 0{,}002\ 2722$ und $x = 2{,}314\ 514$, was mit dem wahren Wert übereinstimmt.

2. Beispiel. Es seien gegeben $y = \ln x$ für $x = 10{,}0$ mit Intervallen von 0,1. Gesucht werden y für $x = 10{,}15$ und x für $y = 2{,}317$. Mit der folgenden Aufstellung

x	y	Tafeldiff.	Q	L
10,0	2,302 585			
		0,009 950		
10,1	2,312 535			
		0,009 853	—0,000 0485	0,009 9015
10,2	2,322 388			
		0,009 756		
10,3	2,332 144			

erhält man $\ln 10{,}15 = 2{,}312\ 535 + 0{,}004\ 951 - 0{,}000\ 012 = 2{,}317\ 474$, was mit dem wahren Wert übereinstimmt.

Für $y = 2{,}317$ wird $k = -0{,}002\ 2088$ und $x = 10{,}145\ 194$, was in der letzten Ziffer um 1 zu groß ist. Beide Beispiele der inversen Interpolation sind mit der Rechenmaschine berechnet worden, um die Genauigkeit der quadratischen Interpolation in den vorliegenden Fällen vorzuführen. Es ist aber zu erkennen, daß der Rechenstab als Hilfsmittel für Nebenrechnungen auch bei im übrigen genaueren Methoden gute Dienste leisten kann.

Die pythagoreischen Skalen $\sqrt{1-X^2}\,..\,\sqrt{1-Y^2}$ und $\sqrt{X^2-1}\,..\,\sqrt{1+Y^2}$

Die beiden **pythagoreischen Skalen** enthalten im Verein mit der Hauptskala bildlich die **Seitenverhältnisse in rechtwinkligen Einheitsdreiecken.**

Die **Kreisskala** $\sqrt{1-X^2}\,..\,\sqrt{1-Y^2}$ gibt in Verbindung mit der Hauptskala zu einer Koordinate des Einheitskreises die andere Koordinate an und daher zum Sinus des zugehörenden Winkels den Cosinus und umgekehrt. Die Koordinaten des Einheitskreises sind Katheten von Einheitsdreiecken mit den Hypotenusen = 1, d. h. von Hypotenusen-Einheitsdreiecken.

Die **Hyperbelskala** $\sqrt{X^2-1}\,..\,\sqrt{1+Y^2}$ gibt in Verbindung mit der Hauptskala zu einer Koordinate der Einheitshyperbel die andere Koordinate an und daher zum Tangens des zugehörenden Winkels den Secans und umgekehrt. Die Koordinaten der Einheitshyperbel sind eine Kathete und die Hypotenuse von Einheitsdreiecken mit der anderen Kathete = 1, d. h. von Katheten-Einheitsdreiecken.

Da die pythagoreischen Skalen wie auch die Skalen der transzendenten Funktionen auf einer oder auf beiden Seiten **abgebrochen** werden müssen, so können extreme Verhältnisse mit dem Rechenstab nicht in direkter Weise berechnet werden. In diesen Fällen zieht man die aus den betreffenden unendlichen Reihen gewonnenen **Näherungsformeln** heran. Für kleine Werte von x genügt meistens eine lineare oder eine quadratische Beziehung zwischen der unabhängigen und der abhängigen Variablen.

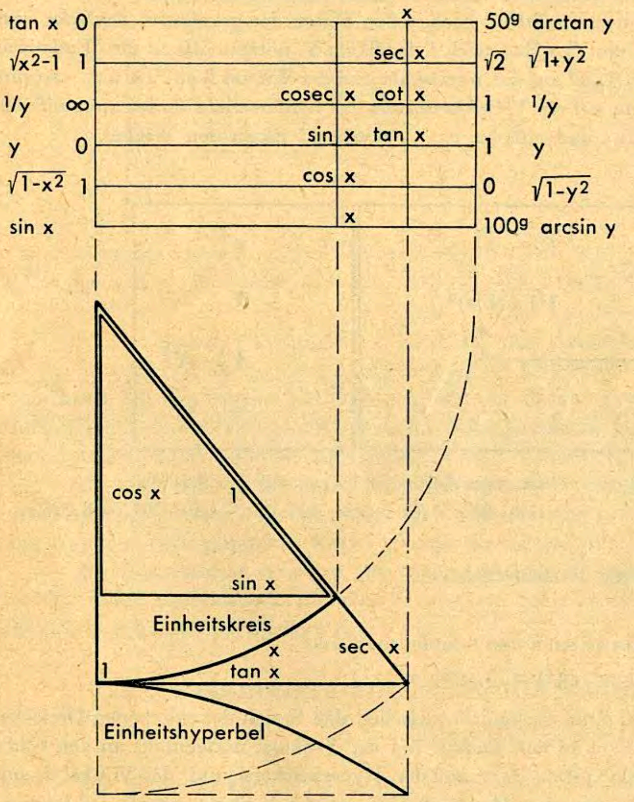
In manchen Fällen ragt der benötigte Bereich des verstellten Schiebers räumlich über den mit ihm gekoppelten Bereich der pythagoreischen (oder auch anderer) Skalen hinaus; **verdoppelte** oder **halbierte** Werte des gegebenen Dreiecks mit zu halbierenden bzw. zu verdoppelnden Ergebnissen führen dann meistens ohne Schieberumstellungen zum Ziele.

Die folgende Zusammenstellung zeigt die gegenseitigen Beziehungen zwischen den pythagoreischen Skalen und den Hauptskalen in der Schiebergrundstellung, wenn man die Ausgangsgröße auf einer der Skalen gleich z setzt. Der Wert dieser Zusammenhänge besteht nicht nur in der direkten Verwendbarkeit, sondern vor allem in der hohen Genauigkeit der Ergebnisse.

$\sqrt{X^2-1}$	$\sqrt{2-z^2}$	$\sqrt{1+1/z^2}$	$\sqrt{1+1/z}$	$\sqrt{1+z}$	z	$\sqrt{1+Y^2}$
$\sqrt{x}$	$1-z^2$	$1/z^2$	$1/z$	z	z^2-1	y^2
$1/\sqrt{x}$	$1/(1-z^2)$	z^2	z	$1/z$	$1/(z^2-1)$	$1/y^2$
$1/y$	$1/\sqrt{1-z^2}$	z	$\sqrt{z}$	$1/\sqrt{z}$	$1/\sqrt{z^2-1}$	$1/y$
$\sqrt{1-X^2}$	z	$\sqrt{1-1/z^2}$	$\sqrt{1-1/z}$	$\sqrt{1-z}$	$\sqrt{2-z^2}$	$\sqrt{1-Y^2}$

Die trigonometrischen und zyklometrischen Skalen sin X^g . . arc sin Y und X^g . . arc tan Y

Die beiden **trigonometrischen und zyklometrischen Skalen** enthalten in Verbindung mit der Hauptskala die **Winkelfunktionen und Winkel,** die in den rechtwinkligen Einheitsdreiecken unmittelbar veranschaulicht werden.



Rechtwinklige Einheitsdreiecke im Einheitskreis und an der Einheitshyperbel, mit gleichen Winkeln

Die Skalen dieses Bildes sind nicht logarithmiert

Auf dem Rechenstab sind die **Winkelfunktionen** gegenüber den Winkeln insofern bevorzugt, als man die Funktionen zwecks Weiterrechnens auf die Hauptskala projizieren kann, während die Winkel nur abzulesen sind. Dies hat seine Berechtigung, weil selten nach Winkeln gefragt wird, häufig aber nach Auswirkungen für beliebige Winkel. Entsprechendes gilt auch für das Argument der hyperbolischen Funktionen.

Während in der Mathematik für die Winkel das Bogenmaß das natürliche Argument ist, erscheint der **Neugrad** bzw. der **rechte Winkel** als das geeigneste künstliche Argument für die Ausrechnungen. Das natürliche Argument der trigonometrischen und der hyperbolischen Funktionen ist oft mit dem Faktor $\pi/2$, 2π oder π versehen, so daß sich der rechte Winkel oder ein ganzes Vielfaches unter Fortfall des π-Faktors von selbst als Einheit ergibt. Beim Mathema-Stab ist deshalb die Teilung der genannten Funktionen in Neugrad vorgesehen.

Die Skala **sin** $\mathbf{X^g}$ . . **200** $:\pi\cdot$ **arc sin Y** (abgekürzt ^{g}sin Y) hängt mit der Kreisskala eng zusammen. Infolge der gemeinsamen Hauptskala ist $Y = \sqrt{1-X^2} = \sin X^g$. Damit ergibt sich $\sqrt{1-Y^2} = \cos X^g$ und die Tatsache, daß der Läuferstrich Wertetripel der beiden Katheten des Hypotenusen-Einheitsdreiecks und eines zugehörenden Winkels anzeigt.

Die Skala **tan** $\mathbf{X^g}$ . . **200** $:\pi\cdot$ **arc tan Y** (abgekürzt ^{g}tan Y) hängt mit der Hyperbelskala eng zusammen. Infolge der gemeinsamen Hauptskala ist $Y = \sqrt{X^2-1} = \tan X^g$. Damit ergibt sich $\sqrt{1+Y^2} = \sec X^g$ und die Tatsache, daß der Läuferstrich Wertetripel der zweiten Kathete und der Hypotenuse des Katheten-Einheitsdreiecks und eines zugehörenden Winkels anzeigt.

Die **Kathete** a eines beliebigen rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse c und der anderen Kathete b findet man aus

$$a = \sqrt{c^2-b^2} = c\sqrt{1-(b/c)^2}.$$

Man stellt auf dem Mathema-Stab gemäß der zweiten Formel Proportionalität zwischen den Seiten des gegebenen Dreiecks und den Seiten des Hypotenusen-Einheitsdreiecks her. Hierzu bringt man $y = c$ an den Endstrich 1 der Skala Y, nötigenfalls an den Endstrich 0,1. Mit dem Läuferstrich auf $y = b$ ergibt sich auch $Y = b/c$, ferner $\sqrt{1-(b/c)^2}$ auf der Kreisskala und der Winkel ß auf der sin.. arcsin-Skala. Durch die Übertragung des Betrages $\sqrt{1-(b/c)^2}$ von der Kreisskala auf die Y-Skala mittels des Läuferstrichs findet man auf der y-Skala bei unveränderter Schieberstellung die gesuchte Kathete $\sqrt{c^2-b^2}$ und auf der sin .. arcsin .. Skala den Winkel α.
Im Schema ist der Rechenvorgang schrittweise dargestellt.

y	c	b	$\sqrt{c^2-b^2}$	y
Y	1	b/c	$\sqrt{1-(b/c)^2}$	Y
$\sqrt{1-X^2}$	0	$\sqrt{1-(b/c)^2}$		$\sqrt{1-Y^2}$
sin X^g	100	ß	α	^{g}sin Y

Beispiele: c = 6,78; b = 4,56; a = 5,02; α = 53,0 ^{g};

c	b	a	α
6,78	4,56	5,02	53,0 ^{g}
15	6	13,75	73,8
15	1,5	14,925	93,6

sin vers $40^g = 1 - \cos 40^g = 0{,}1910$
sem $40^g = (1 - \cos 40^g)/2 = \sin^2 20^g = 0{,}0955$

Ausdrücke wie $\sqrt{d^2-c^2-b^2}$ berechnet man durch Wiederholung der Rechenschritte.

Beispiel: $\sqrt{987^2-654^2-321^2} = 666$.

Die **Hypotenuse** c eines beliebigen rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten a und b findet man aus

$$c = \sqrt{a^2+b^2} = a\sqrt{1+(b/a)^2}.$$

Es sei $a>b$. Man stellt auf dem Mathema-Stab gemäß der zweiten Formel Proportionalität zwischen den Seiten des gegebenen Dreiecks und den Seiten des Katheten-Einheitsdreiecks her. Hierzu bringt man $y = a$ an den Endstrich 1 der Y-Skala, nötigenfalls an den Endstrich 0,1. Mit dem Läuferstrich auf $y = b$ ergibt sich auch $Y = b/a$, ferner $\sqrt{1+(b/a)^2}$ auf der Hyperbelskala und der Winkel ß auf der tan . . arctan-Skala. Durch die Übertragung des Betrages $\sqrt{1+(b/a)^2}$ von der Hyperbelskala auf die Y-Skala mittels des Läuferstrichs findet man auf der y-Skala bei unveränderter Schieberstellung die gesuchte Hypotenuse $\sqrt{a^2+b^2}$. Im Schema ist der Rechenvorgang schrittweise dargestellt.

$\tan X^g$	50		β		${}^g\tan Y$
$\sqrt{X^2-1}$	$\sqrt{2}$		$\sqrt{1+(b/a)^2}$		$\sqrt{1+Y^2}$
y	a	$>$	b	$\sqrt{a^2+b^2}$	y
Y	1		b/a	$\rightarrow \sqrt{1+(b/a)^2}$	Y

Beispiele: a = 6,78; b = 4,56; c = 8,17; ß = 37,7^g
15 6 16,16 24,2
15 1,5 15,075 6,35

Ausdrücke wie $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ berechnet man durch Wiederholung der Rechenschritte. Beispiel: $\sqrt{987^2+654^2+321^2} = 1227$

Da man mit der gleichen Läuferstellung **sin X^g und cos X^g** erhält, so kann man von dem einen Wert zum anderen übergehen entsprechend den Ausdrücken cos arc sin Y und sin arc cos Y, ohne erst den Winkel feststellen zu müssen. Ferner kann man jeden der beiden Werte, sofern er größer als $1/\sqrt{2}$ ist, auf der Kreisskala genauer als auf der Hauptskala erhalten, indem man sin X^g = cos (100 — X^g) bzw. cos X^g = sin (100 — X^g) setzt.

Da man mit der gleichen Läuferstellung **tan X^g und sec X^g** erhält, so kann man von dem einen Wert zum anderen übergehen entsprechend den Ausdrücken sec arc tan Y und tan arc sec Y, ohne erst den Winkel feststellen zu müssen. Ferner kann man sec X^g auf der Hyperbelskala genauer erhalten als aus cos X^g auf der Skala $^1/y$.

Die **Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen** mit einfachen, doppelten und halben Winkeln und die daraus zu gewinnenden algebraischen Funktionen sind auf Seite 29 zusammen mit den verwandten Beziehungen zwischen den hyperbolischen Funktionen tabellarisch dargestellt.

Die exponentiellen Stammfunktionen e^{-X^g} und e^X und die logarithmischen Umkehrfunktionen $(-\ln Y)^g$ und $\ln Y$

Die **Stammfunktion** e^{-X^g} wird auf dem logarithmischen Rechenstab durch eine gleichmäßig geteilte Skala dargestellt. Sie ist daher für eine beliebige Erweiterung des Bereichs geeignet. Die zu den verschiedenen Dekaden der Hauptskala gehörenden Stufen der e^{-X^g} — Skala unterscheiden sich nämlich nur durch ganze Vielfache von 200 : $\pi \cdot \ln 10$ als **additive Konstante.**

n	$200 : \pi \cdot n \ln 10$
1	$146{,}587\,119^g$
2	$293{,}174\,238^g$
3	$439{,}761\,357^g$
4	$586{,}348\,476^g$
5	$732{,}935\,595^g$
6	$879{,}522\,715^g$
7	$1026{,}109\,834^g$
8	$1172{,}696\,953^g$
9	$1319{,}284\,072^g$

Um die additive Konstante wenigstens für die ersten 7 Stufen auf einen runden, zum Kopfrechnen geeigneten Wert, nämlich auf 140^g zu bringen, ist der Läufer des Mathema-Stabes mit entsprechend **versetzten Marken** versehen; der Läuferrand an der oberen Schmalseite ist danach beschriftet.

Die **Stellenzahl** des Ergebnisses von e^{-X^g} im Bereiche der Hauptdekade der Y-Skala ergibt sich daraus, daß die Anzahl der Dezimalnullen hinter dem Komma gleich dem Faktor der additiven Konstanten sein muß. Dementsprechend ist die Stellenzahl des Ergebnisses von e^{+X^g} im Bereiche der Hauptdekade der $^1/y$-Skala in Grundstellung gleich dem Faktor der additiven Konstanten.

Beispiele:

$e^{-0,5\,\pi} = e^{-100^g} = 0{,}208 = {}^1/4{,}81.$

$e^{-3\,\pi} = e^{-600^g} = e^{-560^g - 40^g} = 0{,}807 \cdot 10^4 = {}^1/\,(1{,}239 \cdot 10^4).$

$e^{10\,\pi} = e^{2000^g} = e^{1465,8712^g + 439,7634^g + 94,3654^g} = 10^{10+3} \cdot 4{,}403.$

$\begin{matrix}\sinh\\ \cosh\end{matrix}\; 225^g = (e^{225^g} \mp e^{-225^g}) : 2 = 17{,}135 \mp 0{,}015 = \begin{matrix}17{,}12\\ 17{,}15\end{matrix}.$

${}^g\tanh\, 0{,}99996 = -200 : \pi \cdot \ln \sqrt{(1-0{,}99996) : (1+0{,}99996)} = 344{,}5^g.$

$e^{-0,1\,\pi} \sin 40^g = 0{,}4285.$ Man stellt $y = e^{-20^g}$ auf $Y = 1.$

$e^{+0,1\,\pi} \sin 40^g = 0{,}805.$ Man stellt $y = 1$ unter $e^{-20^g}.$

$\mathrm{amp}\; 60^g = 2\; {}^g\tan e^{60^g} - 100^g = 52{,}7^g.$ Der Läuferstrich auf e^{60^g} ergibt auf der $\tan X^g$ — Skala bei rückläufiger Ablesung 76,35.

Die Skala für die **Stammfunktion eX** unterscheidet sich von der rückläufigen Skala für die Funktion e^{-X^g}, durch den Anstieg von links nach rechts in der Grundstufe und in den höheren Stufen, durch die Stellenwertrichtigkeit in der Vorstufe, und durch das in natürlichen Zahlen ausgedrückte Argument.

Da die exponentiellen und die logarithmischen Funktionen von gleicher Wichtigkeit sind, ist der Mathema-Stab sowohl mit der Funktion eX .. ln Y als auch mit der anschließend besprochenen Funktion ln X .. eY versehen. Infolgedessen kann man die einschlägigen Rechnungen immer direkt ausführen. Es ist aber gegebenenfalls zu bedenken, daß die **Ablesegenauigkeiten** der wechselseitigen Stamm- und Umkehrfunktionen verschieden sind. Mit zunehmendem Exponenten wächst die Ablesegenauigkeit der exponentiellen Stammfunktion eX, während die der exponentiellen Umkehrfunktion eY abnimmt. Die beiden Ablesegenauigkeiten halten sich beim Exponenten 1 mit dem Ergebnis $e = 2{,}718281828459 = {}^1/0{,}3678794412$ die Waage. Entsprechendes gilt für die Ablesegenauigkeit der Logarithmen.

Die **additive Konstante** für die verschiedenen Stufen der e^X — Skala beträgt ein ganzes Vielfaches von $\ln 10 = {}^1/M = 2{,}302585093 = {}^1/0{,}434294482$.

n	n ln 10	n	n ln 10	n	n ln 10
1	2,302585093	4	9,210340372	7	16,118095651
2	4,605170186	5	11,512925465	8	18,420680744
3	6,907755279	6	13,815510558	9	20,723265837

Um die additive Konstante für mehrere Stufen auf den Wert 2,2 zu bringen, ist der Läufer des Mathema-Stabes mit entsprechene **versetzten Marken** versehen; der Läuferrand an der vorderen Schmalseite ist danach beschriftet.

Die **Vorstufe der e^X-Skala** ist auf die Y-Skala stellenwertrichtig bezogen, wenn die Läufermarke den Wert X — 2,2 hat. Did Vorstufe ist auf die $^1/y$-Skala in Grundstellung stellenwertrichtig bezogen, wenn die Läufermarke den Wert 2,2 — X hat. Die resultierende Zahlenfolge auf der e^X-Skala ist in beiden Fällen **rückläufig.** Man bestimmt mit der Vorstufe vor allem die Logarithmen der pythagoreischen, der trigonometrischen und der hyperbolischen Funktionen.

Beispiele:

$\ln \sqrt{1 - 0{,}83^2}\ 1{,}616 - 2{,}2 = -0{,}584$

$\ln \cos 40^g = -0{,}212.$

$\ln \sec 40^g = \quad 0{,}212.$

$\ln \sinh 40^g = -0{,}400$

$\ln \sqrt{1{,}04^2 - 1} = -1{,}253$

$\ln \tan 30^g = -0{,}674.$

$\ln \tan 70^g = \quad 0{,}674.$

$\ln \cosh 40^g = 0{,}1857$

Die **Stellenzahl** des Ergebnisses von e^X im Bereiche der Hauptdekade der Y-Skala ist nach dem für die Vorstufe gesagten gleich dem um 1 vermehrten Faktor der additiven Konstanten.

Beispiele:

$e^2 = 7{,}39 = {}^1/0{,}1353.$

$e^4 = e^{2{,}2 + 1{,}8} = 54{,}6 = {}^1/0{,}01832.$

$e^{15} = e^{13{,}816 + 1{,}184} = 3{,}27 \cdot 10^6 = {}^1/(0{,}306 \cdot 10^{-6}).$

$e^{100} = e^{92{,}1034 + 6{,}9072 + 0{,}9894} = 2{,}688 \cdot 10^{43} = {}^1/(0{,}372 \cdot 10^{-43}).$

$\operatorname{ar\,sinh} 0{,}6 = \ln (0{,}6 + \sqrt{1 + 0{,}6^2}) = \ln 1{,}7662 = 0{,}569.$

$\operatorname{ar\,tanh} 0{,}6 = \ln \sqrt{(1 + 0{,}6) : (1 - 0{,}6)} = 0{,}693.$

Die logarithmischen Stammfunktionen $\pm$ ln X und die exponentiellen Umkehrfunktionen $e^{\pm Y}$

Für die **logarithmischen Stammfunktionen und exponentiellen Umkehrfunktionen** besitzt der Mathema-Stab zwei dreistufige Gruppen von Skalen, $Y = \pm \ln X$ für positive und negative Logarithmen, $e^{\pm Y}$ für direkte und reziproke Potenzen von e.

Mit den logarithmischen Skalen erhält man nicht nur die zugrundegelegten natürlichen Logarithmen auf der Y-Skala, sondern auch die **Logarithmen zu einer beliebigen Basis** a. Hierzu stellt man einen Schieberendstrich dem Wert a auf der logarithmischen Skala gegenüber, denn es muß sein $\quad {}^{a}\log a = 1.$

Die Logarithmen zur Basis a unterscheiden sich von den natürlichen Logarithmen durch einen konstanten Faktor, den **Modul**

$$M_a = {}^1/\ln a.$$

Von Bedeutung ist der Modul des dekadischen oder **Briggs'schen Logarithmus** $M = 0{,}4343$.

Beispiele: ${}^{10}\log 2 = \lg 2 = 0{,}301 \qquad \lg 10^x = x.$

Das **Potenzieren** einer Zahl a mit dem Exponenten m auf dem Rechenstab kann so erklärt werden, daß man auf der Y-Skala m ln a bildet und hierzu den Numerus auf der e^Y-Skala aufsucht, entsprechend der Beziehung

$$\ln a^m = m \ln a.$$

Statt dessen kann man aber auch den Numerus zu $m \cdot {}^{a}\log a$ von der y-Skala ausgehend bestimmen. Daß dies die Regel ist, wird dadurch offenbar, daß man die Y-Skala hier gar nicht benötigt und weder ln a noch m ln a abliest.

Für das **Radizieren** gilt das Vorstehende mit ${}^1/n = m$.

Die folgenden Schemas sind so angelegt, daß Schieberumstellungen nicht nötig werden.

$-\ln X$	$^1/a$	$^1/a^m$	e^{-Y}
$^1/y$	m	1	$^1/y$
y	$^1/m$	1	y
ln X	a	a^m	e^Y

$-\ln X$	$^1/a$	$1/a^{1/n}$	e^{-Y}
$^1/y$	$^1/n$	1	$^1/y$
y	n	1	y
ln X	a	$a^{1/n}$	e^Y

Beispiele: $1{,}05^{20} = 2{,}653$; $\sqrt[5]{2} = 1{,}1488$;

$0{,}95^{20} = 0{,}3585$; $\sqrt{0{,}5} = 0{,}8705$;

$2345^{6,7} = 10^{6,7 \cdot \lg 2345}$ (mit $y = .67$ über ln 10)

$= 10^{2258} = 3{,}80 \cdot 10^{22}$;

$\ln (246 \cdot 10^8) = \ln 246 + 8 \ln 10 = 5{,}505 + 18{,}421$

$= 23{,}926$;

$e^{15} = (e^{7,5})^2 = 1810^2 = 3{,}27 \cdot 10^6$;

$e^{\sin 40^g} = 1{,}800$; Ergebnis mit nur einer Läufereinstellung;

$(\ln 10)^2 = 5{,}30$; „ „ „ „ „

$\ln (\ln 10) = 0{,}835$; „ „ „ „ „

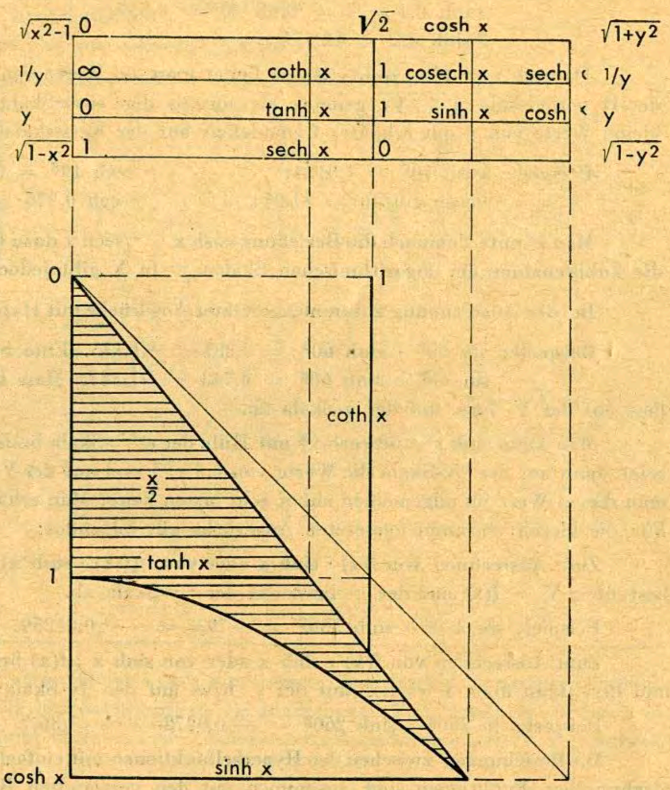
Die beiden Gruppen der logarithmischen Skalen weisen Zahlen auf, die einander **reziprok** sind. Die Angaben sind für Werte von $e > X > 1/e$ genauer ablesbar als auf der y-Skala und 1/y-Skala und zwar um so mehr, je näher die Zahlen bei 1 liegen.

Beispiel: $1/1{,}01234 = 0{,}98781$.

Die Hyperbelfunktionen und ihre Umkehrungen

Die Skalen für die **Hyperbelfunktionen** sind auf der Rückseite des Schiebers aufgetragen. Wie bei den anderen Schieberskalen und wie die Bezeichnung der Veränderlichen mit x und y auch angibt, beziehen sich die Werte auf die y-Skala. Die Vermittlung zwischen den hyperbolischen Skalen und der y-Skala übernehmen einerseits die Ablesestriche an den Fenstern und anderseits die ihnen gegenüberliegenden Endstriche der Y-Skala.

Im gleichen Bereich erhält man X^2 und $\sqrt{X}$ mittels der Marken 2π und 4π recht genau.



Hyperbelfunktionen

Die Skalen dieses Bildes sind nicht logarithmiert

Beispiele: $\sinh 0{,}6\,\pi/2 = \sinh 60^g = 1{,}088$; $\tanh 0{,}4\,\pi/2 = \tanh 40^g = 0{,}557$; ${}^g\sinh 0{,}2 = 12{,}65^g$;

$\cosh 0{,}5\,\pi/2 = \cosh 50^g = 1{,}325$; $200:\pi \cdot \mathrm{ar}\sinh 2 = {}^g\sinh 2 = 92^g$; $\ln\cosh 50^g = \ln 1{,}35 = 0{,}2815$.

Da $\cosh x = \sqrt{1+\sinh^2 x}$ ist, so findet man die Werte von cosh x für kleine Argumente mit Hilfe der sinh-Grundstufenskala und der Hyperbelskala $\sqrt{1+Y^2}$ genauer als mittels der cosh-Skala. In entsprechender Weise ergibt sich $\mathrm{sech}\, x = \sqrt{1-\tanh^2 x}$ für kleine Werte von x mit erhöhter Genauigkeit auf der Kreisskala $\sqrt{1-Y^2}$.

Beispiele: $\cosh 10^g = 1{,}0124$; ${}^g\cosh 1{,}0246 = 14{,}0^g$;

$\mathrm{sech}\, 10^g = 0{,}9878$; ${}^g\mathrm{sech}\, 0{,}975 = 14{,}4^g$.

Man könnte demnach die Beziehung $\cosh x = 1/\mathrm{sech}\, x$ dazu benutzen, nahe bei 1 liegende Zahlen in reziproke Zahlen zu verwandeln; die Zuhilfenahme der logarithmischen Skalen $\pm \ln X$ gibt jedoch trotz größerer Einfachheit genauere Werte.

Bei der Ausrechnung zusammengesetzter Ausdrücke mit Hyperbelfunktionen beginnt man mit der **Einstellung der Hyperbelfunktion.**

Beispiele: $\sin 60^g \cdot \sinh 60^g = 0{,}881 = 1/1{,}135$. Eine Schieber- und eine Läufereinstellung.

$\sin 60^g : \sinh 60^g = 0{,}743 = 1/1{,}345$. Man bringt $y = \sinh x$ unter den auf sin x eingestellten Läuferstrich und liest auf der Y- bzw. auf der y-Skala ab.

Man kann $\sinh x^g$ und $\cosh x^g$ mit Hilfe der e^{-X^g}-Skala bestimmen, wenn man den Schieberendstrich auf $Y = 0{,}5$ stellt; der Läufer zeigt dann auf der $1/y$-Skala die Werte von $0{,}5\, e^{X^g}$ und auf der Y-Skala die Werte von e^{-X^g} an. Für $X > 224^g$ ist $0{,}5\, e^{-X^g}$ so klein, daß man diesen Wert im allgemeinen außer acht lassen kann. Man erhält so die Fortsetzung der sinh- und cosh-Skalen der Schieberrückseite. Für die hiermit zusammengesetzten Ausdrücke gilt folgendes:

Zum Ausrechnen von $\mathbf{f(x) \cdot \sinh x}$ oder von $1/(\mathbf{f(x) \cdot \sinh x})$ bringt man $y = 0{,}5$ unter den auf e^{-X^g} eingestellten Läuferstrich und liest über $Y = f(x)$ auf der y- bzw. auf der $1/y$-Skala ab.

Beispiel: $\sin 330^g \cdot \sinh 330^g = -79{,}4 = -1/0{,}01259$.

Zum Ausrechnen von $\mathbf{f(x) : \sinh x}$ oder von $\mathbf{\sinh x : f(x)}$ bringt man $y = e^{-X^g}$ bei zunächst unverstelltem Läufer über $Y = 0{,}5$ und liest dann über $Y = f(x)$ auf der y- bzw. auf der $1/y$-Skala ab.

Beispiel: $\sin 260^g : \sinh 260^g = -0{,}02725 = -1/36{,}7$.

Die **Beziehungen zwischen den Hyperbelfunktionen** mit einfachen, doppelten und halben Argumenten und die daraus zu gewinnenden algebraischen Funktionen sind zusammen mit den verwandten Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen tabellarisch nachstehend dargestellt.

Beziehungen zwischen den $\begin{matrix}\text{trigonometrischen}\\ \text{hyperbolischen}\end{matrix}$ Funktionen mit einfachem, mit doppeltem und mit halbem Argument

sin φ sinh φ	z	$\sqrt{\pm 1 \mp z^2}$	$1/\sqrt{1/z^2 - 1}$	$\sqrt{\dfrac{\pm 1 \mp \sqrt{1 \mp z^2}}{2}}$	$\sqrt{\dfrac{\pm 1 \mp z}{2}}$	$\sqrt{\dfrac{\pm 1 \mp 1/\sqrt{1 \pm z^2}}{2}}$
cos φ cosh φ	$\sqrt{1 \mp z^2}$	z	$1/\sqrt{1 - z^2}$	$\sqrt{\dfrac{1 + \sqrt{1 \mp z^2}}{2}}$	$\sqrt{\dfrac{1 + z}{2}}$	$\sqrt{\dfrac{1 + 1/\sqrt{1 \pm z^2}}{2}}$
tan φ tanh φ	$1/\sqrt{1/z^2 \mp 1}$	$\sqrt{\pm 1/z^2 \mp 1}$	z	$\dfrac{z}{1 + \sqrt{1 \mp z^2}}$ $= \dfrac{\pm 1 \mp \sqrt{1 \mp z^2}}{z}$	$\sqrt{\dfrac{\pm 1 \mp z}{1 + z}}$	$\dfrac{\mp 1 \pm \sqrt{1 \pm z^2}}{z}$ $= \dfrac{z}{1 + \sqrt{1 \pm z^2}}$
sin 2φ sinh 2φ	$2z\sqrt{1 \mp z^2}$	$2z\sqrt{\pm 1 \mp z^2}$	$\dfrac{2z}{1 \pm z^2}$	z	$\sqrt{\pm 1 \mp z^2}$	$1/\sqrt{1/z^2 - 1}$
cos 2φ cosh 2φ	$1 \mp 2z^2$	$2z^2 - 1$	$\dfrac{1 \mp z^2}{1 \pm z^2}$	$\sqrt{1 \mp z^2}$	z	$1/\sqrt{1 - z^2}$
tan 2φ tanh 2φ	$\dfrac{2z\sqrt{1 \mp z^2}}{1 \mp 2z^2}$	$\dfrac{2z\sqrt{\pm 1 \mp z^2}}{2z^2 - 1}$	$\dfrac{2z}{1 \mp z^2}$	$1/\sqrt{1/z^2 \mp 1}$	$\sqrt{\pm 1/z^2 \mp 1}$	z

Die oberen Vorzeichen in den vorstehenden Formeln gehören zu den trigonometrischen Funktionen, die unteren zu den hyperbolischen.

Man erhält mit dem einfachen, mit dem doppelten bzw. mit dem halben Argument die angegebenen Funktionen von z, wenn in der gleichen Spalte der Wert der Ausgangsfunktion für das einfache Argument gleich z ist; z kann von einem zusammengesetzten Ausdruck wie a/b oder $\sqrt{a/b}$ usw. herrühren.

Man erhält die Beziehung einer Funktion mit einfachem, mit doppeltem bzw. mit halbem Argument zur Ausgangsfunktion in der gleichen Spalte mit einfachem Argument, indem man z durch die Ausgangsfunktion ersetzt. Die Ausdrücke lassen sich in leicht ersichtlicher

Weise vereinfachen, wenn man nur auf das doppelte bzw. auf das halbe Argument als Ausgangsgröße Wert legt, nicht aber auf bestimmte Ausgangsfunktionen dieser Argumente.

Ein wichtiges Beispiel für die Anwendung vorstehender Beziehungen ist die **goniometrische Auflösung quadratischer Gleichungen.**

1. $x^2 \pm 2ax - b^2 = 0.$

Man setzt $b/a = \tan 2\varphi$ und findet $x_1 = \pm b \tan \varphi$, $x_2 = \mp b \cot \varphi$.

2. $x^2 \pm 2ax + b^2 = 0$ mit $b < a$.

Man setzt $b/a = \sin 2\varphi$ und findet $x_1 = \mp b \tan \varphi$, $x_2 = \mp b \cot \varphi$.

Beispiele: $x^2 + 234x - 5670 = 0;\quad x_1 = 22{,}15;\quad x_2 = -256{,}15.$

$x^2 + 234x + 5670 = 0;\quad x_1 = -27{,}45;\quad x_2 = -206{,}55$

Gaußsche Fehlerfunktionen

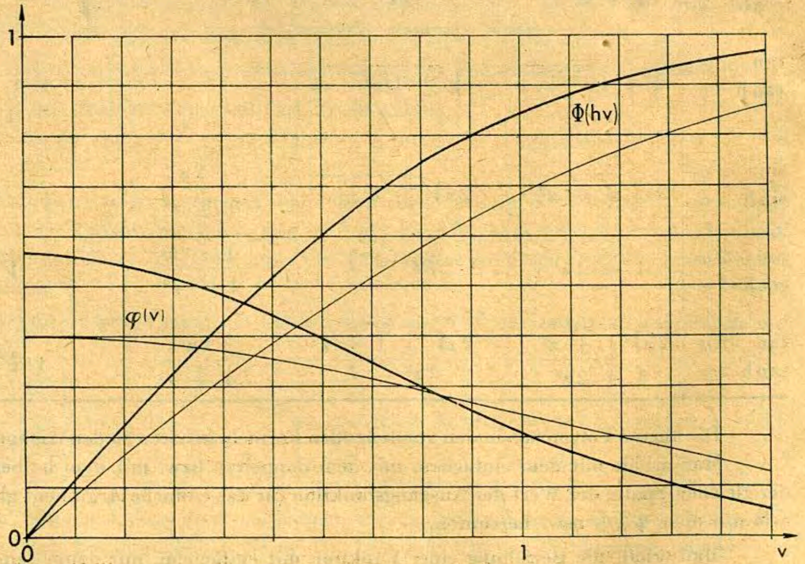
Gaußsches Verteilungsgesetz für die zufälligen **Beobachtungsfehler** $\pm v$:

$$\varphi(v) = h \exp(-h^2 v^2) / \sqrt{\pi}.$$

Hierin ist h das **Genauigkeitsmaß** der Beobachtungsreihe.

Man erhält das Gaußsche Verteilungsgesetz für die **statistische Häufigkeit** der Schwankungen $\pm v$, wenn man $h = 1/\sqrt{2}\, s$ setzt, worin s die **Streuung** der Beobachtungsreihe bedeutet.

Man kann alle Verteilungskurven auf die Kurve für $h = 1$ oder für $s = 1$ zurückführen, indem man die Abszissen im Verhältnis $1 : h$ bzw. $s : 1$ und die Ordinaten im umgekehrten Verhältnis verändert.



Gaußsche Fehlerfunktionen
für das Genauigkeitsmaß 1 und für das Streuungsmaß 1

Das **Gaußsche Fehlerintegral**

$$k\,\Phi\,(hv) = k \int_{-v}^{+v} \varphi\,(v)\,dv$$

gibt die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Fehlers bis zum Betrage $\pm$ v an. Es ist $k = 1 / \Phi\,(hv_{max})$.

Während die Fehlerverteilung elementar berechnet werden kann, ist das Fehlerintegral z. B. durch Reihenentwicklungen zu gewinnen. Man kann alle Kurven der Fehlerintegrale mit $k = 1$ jedoch auf die Kurve für $h = 1$ oder für $s = 1$ zurückführen, indem man die Abszissen im Verhältnis $1 : h$ bzw. $s : 1$ verändert.

Bei Gaußscher Fehlerverteilung ist

der **durchschnittliche Fehler**

$$d = \frac{k}{\sqrt{\pi}} \int_{-v_{max}}^{+v_{max}} |v|\,\varphi\,(v)\,dv = k\,({}^{1}/\sqrt{\pi} - \varphi\,(v_{max})/h) : h,$$

das Quadrat des **mittleren Fehlers**

$$m^2 = \frac{k}{\sqrt{\pi}} \int_{-v_{max}}^{+v_{max}} v^2\,\varphi\,(v)\,dv = k\,(0{,}5 - hv_{max}\,\varphi\,(v_{max})) : h^2\,,$$

der **wahrscheinliche Fehler** r der mit der Wahrscheinlichkeit 0,5 auftretende Fehler.

Bei beliebiger Fehlerverteilung um das arithmetische Mittel von n Beobachtungen gleicher Genauigkeit ist

die **durchschnittliche Abweichung**

$$d = \Sigma\,|v|\,/\,\sqrt{n\,(n-1)},$$

das Quadrat der **mittleren Abweichung**

$$m^2 = \Sigma\,v^2\,/\,(n-1),$$

das Quadrat der **mittleren Abweichung des arithmetischen Mittels**

$$M^2 = \Sigma\,v^2\,/\,n\,(n-1).$$

Wenn die Abweichungen nach dem Gaußschen Gesetz verteilt und nicht begrenzt sind, dann ist

$$h = n\,/\,\sqrt{\pi}\,\Sigma\,|v|$$

und ferner

$$h^2 = n\,/\,2\,\Sigma\,v^2\,.$$

Beispiel: Die zulässige Toleranz eines Erzeugnisses sei v_1, der größte auftretende Fehler sei $v_2 > v_1$. Der Anteil der brauchbaren Erzeugnisse an der Gesamtmenge ist

$$\eta = \Phi\,(hv_1) : \Phi\,(hv_2).$$

Für beispielsweise $v_1 : v_2 = 0,5$ und einige Werte von hv_2 findet man an Hand der Tabelle der Gaußschen Fehlerfunktionen:

hv_2	$\Phi(hv_1)$	$\Phi(hv_2)$	η	m/v_2	d/v_2	r/v_2
0	0	0	0,5000	0,57735	0,50000	0,50000
1	0,5204999	0,8427008	0,6177	0,50369	0,42321	0,39270
3	0,9691052	0,9999779	0,9691	0,23565	0,18804	0,15897
∞	1	1	1	0	0	0

Die Fehlerverteilung auf einige Stufenbreiten ergibt sich für $n = 5000$ wie folgt:

hv_2	$\pm v/v_2 = 0,0$		0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0	n =		500	500	500	500	500
1	n =		660	610	521	411	298
3	n =		1547	753	178	21	1
∞	n =	5000	0	0	0	0	0

Ist die Fehlerverteilung für $hv_2 = 3$ nach der vorstehenden Aufstellung gegeben, dann findet man

$$\begin{aligned}\Sigma |v| / v_2 &= 2 \cdot 0,1 \cdot 1547 = 309,4 \\ &+ 2 \cdot 0,3 \cdot 753 = 451,8 \\ &+ 2 \cdot 0,5 \cdot 178 = 178,0 \\ &+ 2 \cdot 0,7 \cdot 21 = 29,4 \\ &+ 2 \cdot 0,9 \cdot 1 = 1,8 \\ &= 970,4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma v^2 / v_2^2 &= 2 \cdot 0,1^2 \cdot 1547 = 30,94 \\ &+ 2 \cdot 0,3^2 \cdot 753 = 135,54 \\ &+ 2 \cdot 0,5^2 \cdot 178 = 89,00 \\ &+ 2 \cdot 0,7^2 \cdot 21 = 20,58 \\ &+ 2 \cdot 0,9^2 \cdot 1 = 1,62 \\ &= 277,68\end{aligned}$$

Daraus ergeben sich $d / v_2 = 970,4 : 5000 = 0,194$; $\quad m / v_2 = \sqrt{277,68 : 5000} = 0,236$;

$h \cdot v_2 = 5000 / 970,4 \sqrt{\pi} = 2,91$; $\quad h \cdot v_2 = \sqrt{5000 / 555,36} = 3,01$.

Die Ergebnisse weichen von den für kontinuierliche Gaußsche Verteilung gültigen Werten etwas ab.

Gaußsche Fehlerfunktionen

100 Φ hv	100 φ hv/h	100 hv	100 mh	100 dh	100 rh	100 Φ hv	100 φ hv/h	100 hv	100 mh	100 dh	100 rh
0	56,41896	0	0	0	0	27,63263	53,00071	25	14,315	12,37034	12,30617
1,12834	56,41332	1	0,577	0,49999	0,49999	28,68997	52,73109	26	14,877	12,85419	12,78205
2,25644	56,39640	2	1,155	0,99994	0,99990	29,74182	52,45236	27	15,439	13,33679	13,25624
3,38410	56,36820	3	1,732	1,49978	1,49967	30,78800	52,16466	28	15,998	13,81804	13,72834
4,51109	56,32876	4	2,308	1,99945	1,99930	31,82834	51,86817	29	16,556	14,29793	14,19840
5,63718	56,27809	5	2,885	2,49899	2,49848	32,86267	51,56305	30	17,113	14,77638	14,66638
6,76215	56,21622	6	3,461	2,99818	2,99732	33,89081	51,24947	31	17,670	15,25336	15,13219
7,88577	56,14318	7	4,038	3,49713	3,49573	34,91259	50,92761	32	18,224	15,72885	15,59577
9,00781	56,05903	8	4,613	3,99576	3,99362	35,92785	50,59766	33	18,777	16,20275	16,05706
10,12806	55,96381	9	5,188	4,49394	4,49091	36,93644	50,25979	34	19,327	16,67505	16,51600
11,24630	55,85758	10	5,768	4,99189	4,98753	37,93819	49,91418	35	19,878	17,14573	16,97251
12,36230	55,74040	11	6,338	5,48892	5,48340	38,93296	49,56105	36	20,426	17,61723	17,42654
13,47584	55,61235	12	6,912	5,98561	5,97845	39,92059	49,20057	37	20,973	18,08187	17,87802
14,58671	55,47349	13	7,485	6,48171	6,47260	40,90093	48,83294	38	21,519	18,54730	18,32865
15,69470	55,32391	14	8,059	6,97718	6,96578	41,87385	48,45837	39	22,062	19,01089	18,77310
16,79959	55,16370	15	8,632	7,47193	7,45793	42,83922	48,07706	40	22,604	19,47258	19,21659
17,90117	54,99296	16	9,205	7,96593	7,94896	43,79690	47,68922	41	23,144	19,93232	19,65730
18,99923	54,81179	17	9,776	8,45912	8,43880	44,74676	47,29503	42	23,684	20,39015	20,09514
20,09357	54,62028	18	10,346	8,95150	8,92739	45,68867	46,89472	43	24,220	20,84596	20,53010
21,18398	54,41856	19	10,916	9,44299	9,41464	46,62251	46,48851	44	24,754	21,29969	20,96209
22,27025	54,20674	20	11,486	9,93353	9,90049	47,54818	46,07660	45	25,285	21,75132	21,39109
23,35218	53,98495	21	12,054	10,42305	10,38487	48,46555	45,65920	46	25,815	22,20084	21,81701
24,42958	53,75331	22	12,620	10,91156	10,86770	49,37452	45,23654	47	26,343	22,64816	22,23981
25,50225	53,51197	23	13,186	11,39896	11,34892	50,27498	44,80883	48	26,868	23,09326	22,65944
26,57000	53,26105	24	13,690	11,88525	11,82845	51,16683	44,37629	49	27,391	23,53609	23,07585
27,63263	53,00071	25	14,315	12,37034	12,30617	52,04999	43,93913	50	27,913	23,97662	23,48899

Gaußsche Fehlerfunktionen

100 Φ hv	100 φ hv/v	100 hv	100 mh	100 dh	100 rh	100 Φ hv	100 φ hv/h	100 hv	100 mh	100 dh	100 rh
52,04999	43,93913	50	27,913	23,97662	23,48899	71,11556	32,14655	75	40,122	34,13094	32,63465
52,92437	43,49758	51	28,432	24,41480	23,89880	71,75367	31,66479	76	40,573	34,49882	32,94944
53,78987	43,05185	52	28,949	24,85061	24,30526	72,38216	31,18400	77	41,020	34,86351	33,26032
54,64641	42,60217	53	29,464	25,28398	24,70809	73,00104	30,70438	78	41,464	35,22495	33,56687
55,49392	42,14876	54	29,967	25,71489	25,10788	73,61035	30,22608	79	41,906	35,58315	33,86923
56,33233	41,69183	55	30,487	26,14330	25,50400	74,21010	29,74929	80	42,343	35,93806	34,16782
57,16157	41,23161	56	30,994	26,56916	25,89649	74,80033	29,27416	81	42,778	36,28968	34,46194
57,98158	40,76832	57	31,499	26,99243	26,28545	75,38108	28,80086	82	43,209	36,63797	34,75183
58,79229	40,30217	58	32,001	27,41310	26,67077	75,95238	28,32955	83	43,637	36,98292	35,03807
59,59365	39,83338	59	32,501	27,83112	27,05244	76,51427	27,86037	84	44,061	37,32453	35,31978
60,38561	39,36217	60	32,999	28,24645	27,43057	77,06680	27,39348	85	44,482	37,66275	35,59723
61,16812	38,88876	61	33,494	28,65905	27,80521	77,61002	26,92904	86	44,900	37,99757	35,87042
61,94114	38,41336	62	33,985	29,06889	28,17510	78,14398	26,46717	87	45,314	38,32898	36,14031
62,70463	37,93618	63	34,475	29,47594	28,54194	78,66873	26,00803	88	45,724	38,65695	36,40540
63,45857	37,45743	64	34,960	29,88017	28,90511	79,18432	25,55173	89	46,131	38,98149	36,66624
64,20292	36,97734	65	35,445	30,28152	29,26351	79,69082	25,09843	90	46,535	39,30256	36,92284
64,93765	36,49609	66	35,926	30,68000	29,61871	80,18828	24,64823	91	46,934	39,62017	37,17645
65,66275	36,01391	67	36,404	31,07553	29,97008	80,67677	24,20127	92	47,331	39,93428	37,42506
66,37820	35,53099	68	36,879	31,46812	30,31708	81,15635	23,75767	93	47,723	40,24490	37,66946
67,08399	35,04753	69	37,352	31,85772	30,66015	81,62710	23,31753	94	48,112	40,55201	37,90967
67,78010	34,56374	70	37,821	32,24430	30,99948	82,08908	22,88096	95	48,498	40,85562	38,14710
68,46654	34,07981	71	38,287	32,62784	31,33446	82,54236	22,44808	96	48,879	41,15569	38,37947
69,14330	33,59594	72	38,750	33,00829	31,66564	82,98703	22,01899	97	49,258	41,45222	38,60771
69,81038	33,11231	73	39,211	33,38565	31,99275	83,42315	21,59378	98	49,631	41,74522	38,83182
70,46780	32,62912	74	39,668	33,75987	32,31576	83,85081	21,17254	99	50,002	42,03468	39,05320
71,11556	32,14655	75	40,122	34,13094	32,63465	84,27008	20,75537	100	50,369	42,32058	39,26968

Gaußsche Fehlerfunktionen

100 Φ hv	100 φ hv/h	100 hv	100 mh	100 dh	100 rh
84,27008	20,75537	100	50,3690	42,32058	39,26968
84,68105	20,34236	101	50,7321	42,60292	39,48211
85,08380	19,93357	102	51,0914	42,88171	39,69050
85,47842	19,52909	103	51,4468	43,15694	39,89491
85,86499	19,12899	104	51,7986	43,42861	40,09703
86,24360	18,73335	105	52,1434	43,69670	40,29409
86,61435	18,34222	106	52,4904	43,96124	40,48725
86,97732	17,95566	107	52,8307	44,22222	40,67654
87,33261	17,57373	108	53,1671	44,47964	40,86199
87,68030	17,19649	109	53,4997	44,73350	41,04535
88,02050	16,82398	110	53,8283	44,98382	41,22380
88,35330	16,45625	111	54,1532	45,23058	41,39852
88,67879	16,09334	112	54,4741	45,47380	41,56956
88,99707	15,73528	113	54,7912	45,71350	41,73693
89,30823	15,38211	114	55,1045	45,94968	41,90069
89,61238	15,03386	115	55,4139	46,18235	42,06284
89,90962	14,69056	116	55,7193	46,41150	42,22005
90,20004	14,35223	117	56,0210	46,63715	42,37378
90,48374	14,01888	118	56,3187	46,85934	42,52405
90,76083	13,69054	119	56,6125	47,07804	42,67093
91,03140	13,36722	120	56,9017	47,29329	42,81444
91,29555	13,04892	121	57,1886	47,50510	42,95464
91,55339	12,73565	122	57,4709	47,71348	43,09387
91,80501	12,42742	123	57,7492	47,91845	43,22811
92,05052	12,12422	124	58,0238	48,12003	43,35917
92,29001	11,82606	125	58,2945	48,31823	43,48710

100 Φ hv	100 φ hv/h	100 hv	100 mh	100 dh	100 rh
92,29001	11,82606	125	58,2945	48,31823	43,48710
92,52359	11,53292	126	58,5613	48,51308	43,61193
92,75136	11,24479	127	58,8243	48,70459	43,73374
92,97342	10,96168	128	59,0835	48,89277	43,85255
93,18987	10,68355	129	59,3389	49,07766	43,96843
93,40080	10,41040	130	59,5904	49,25928	44,08379
93,60632	10,14220	131	59,8383	49,43764	44,19438
93,80652	9,87894	132	60,0823	49,61278	44,30216
94,00150	9,62623	133	60,3159	49,77871	44,40717
94,19137	9,36712	134	60,5590	49,95345	44,50949
94,37622	9,11850	135	60,7917	50,11904	44,60915
94,55614	8,87471	136	61,0208	50,28150	44,70618
94,73124	8,63570	137	61,2463	50,44087	44,80066
94,90160	8,40021	138	61,4694	50,59846	44,89263
95,06733	8,17193	139	61,6859	50,75038	44,98212
95,22851	7,94709	140	61,9004	50,90059	45,07171
95,38524	7,72688	141	62,1112	51,04781	45,15679
95,53762	7,51127	142	62,3184	51,19207	45,23954
95,68573	7,30023	143	62,5221	51,33339	45,32000
95,82966	7,09369	144	62,7220	51,47182	45,39821
95,96950	6,89161	145	62,9186	51,60739	45,47423
96,10535	6,69395	146	63,1116	51,74011	45,54811
96,23729	6,50067	147	63,3011	51,87001	45,61983
96,36541	6,31170	148	63,4871	51,98096	45,68959
96,48979	6,12700	149	63,6697	52,12154	45,75729
96,61052	5,94651	150	63,8493	52,24322	45,82302

Gaußsche Fehlerfunktionen

100 Φ hv	100 φ hv/h	100 hv	100 mh	100 dh	100 rh
96,61052	5,94651	150	63,8493	52,24322	45,82302
96,72768	5,77019	151	64,0252	52,36223	45,88683
96,84135	5,59798	152	64,1978	52,47860	45,94875
96,95162	5,42982	153	64,3670	52,59235	46,01124
97,05857	5,26565	154	64,5330	52,70355	46,06980
97,16227	5,10543	155	64,6958	52,81220	46,12661
97,26281	4,94916	156	64,8552	52,91827	46,18169
97,36026	4,79659	157	65,0117	53,02201	46,23510
97,45470	4,64785	158	65,1648	53,12326	46,28686
97,54620	4,50283	159	65,3149	53,22202	46,33703
97,63484	4,36145	160	65,4619	53,31858	46,38564
97,72069	4,22367	161	65,6058	53,41273	46,43273
97,80381	4,08943	162	65,7467	53,50459	46,47833
97,88429	3,95866	163	65,8846	53,59420	46,52249
97,96218	3,83181	164	66,0190	53,68107	46,56523
98,03756	3,70730	165	66,1517	53,76680	46,60661
98,11049	3,58660	166	66,2810	53,84986	46,64665
98,18104	3,46913	167	66,4072	53,93081	46,68539
98,24928	3,35484	168	66,5307	54,00968	46,72287
98,31526	3,24367	169	66,6515	54,08651	46,75911
98,37904	3,13555	170	66,7696	54,16134	46,79415
98,44070	3,03043	171	66,8850	54,23420	46,82803
98,50028	2,92825	172	66,9976	54,30513	46,86076
98,55785	2,82895	173	67,1076	54,37417	46,89241
98,61346	2,73247	174	67,2151	54,44134	46,92297
98,66717	2,63875	175	67,3200	54,50669	46,95250

100 Φ hv	100 φ hv/h	100 hv	100 mh	100 dh	100 rh
98,66717	2,63875	175	67,3200	54,50669	46,95250
98,71903	2,54774	176	67,4224	54,57025	46,98101
98,76910	2,45937	177	67,5223	54,63206	47,01109
98,81742	2,37359	178	67,6199	54,69215	47,03781
98,86406	2,29035	179	67,7150	54,75054	47,06357
98,90905	2,20959	180	67,8077	54,80729	47,08845
98,95245	2,13124	181	67,8982	54,86243	47,11244
98,99431	2,05527	182	67,9863	54,91597	47,13559
99,03467	1,98160	183	68,0722	54,96798	47,15790
99,07359	1,91019	184	68,1560	55,01847	47,17943
99,11110	1,84099	185	68,2375	55,06746	47,20018
99,14725	1,77394	186	68,3170	55,11501	47,22017
99,18207	1,70899	187	68,3943	55,16115	47,23943
99,21562	1,64609	188	68,4696	55,20589	47,25799
99,24793	1,58519	189	68,5429	55,24928	47,27587
99,27904	1,52624	190	68,6142	55,29135	47,29308
99,30899	1,46918	191	68,6826	55,33213	47,30966
99,33782	1,41397	192	68,7510	55,37165	47,32561
99,36557	1,36057	193	68,8166	55,40993	47,34097
99,39226	1,30892	194	68,8805	55,44701	47,35574
99,41792	1,25898	195	68,9424	55,48294	47,36994
99,44263	1,21071	196	69,0027	55,51769	47,38362
99,46637	1,16405	197	69,0614	55,55135	47,39676
99,48920	1,11897	198	69,1181	55,58391	47,40940
99,51114	1,07541	199	69,1733	55,64543	47,42155
99,53223	1,03335	200	69,2269	55,64590	47,43322

Gaußsche Fehlerfunktionen

100 Φ hv	100 φ hv/h	100 hv	100 mh	100 dh	100 rh
99,53223	1,03335	200	69,2269	55,64590	47,43322
99,55248	0,99273	201	69,2789	55,67539	47,44443
99,57195	0,95352	202	69,3293	55,70388	47,45521
99,59063	0,91567	203	69,3783	55,73144	47,46556
99,60858	0,87915	204	69,4258	55,75806	47,47550
99,62581	0,84392	205	69,4719	55,78378	47,48504
99,64235	0,80994	206	69,5166	55,80862	47,49420
99,65822	0,77717	207	69,5599	55,83261	47,50299
99,67344	0,74558	208	69,6018	55,85578	47,51142
99,68805	0,71513	209	69,6424	55,87814	47,51951
99,70205	0,68557	210	69,6814	55,89994	47,52726
99,71548	0,65751	211	69,7199	55,92056	47,53470
99,72836	0,63028	212	69,7568	55,94064	47,54184
99,74070	0,60405	213	69,7926	55,96001	47,54867
99,75253	0,57880	214	69,8271	55,97869	47,55522
99,76386	0,55450	215	69,8606	55,99669	47,56150
99,77472	0,53111	216	69,8929	56,01404	47,56752
99,78511	0,50860	217	69,9242	56,03076	47,57327
99,79505	0,48695	218	69,9544	56,04688	47,57878
99,80459	0,46613	219	69,9837	56,06238	47,58406
99,81372	0,44611	220	70,0119	56,07731	47,58912
99,82244	0,42686	221	70,0392	56,09170	47,59395
99,83079	0,40836	222	70,0656	56,10554	47,59858
99,83878	0,39059	223	70,0912	56,11884	47,60301
99,84642	0,37352	224	70,1157	56,13165	47,60724
99,85373	0,35712	225	70,1394	56,14396	47,61129

100 Φ hv	100 φ hv/h	100 hv	100 mh	100 dh	100 rh
99,85373	0,35712	225	70,1394	56,14396	47,61129
99,86071	0,34137	226	70,1623	56,15581	47,61516
99,86739	0,32625	227	70,1844	56,16719	47,61886
99,87377	0,31174	228	70,2070	56,17813	47,62239
99,87986	0,29781	229	70,2268	56,18866	47,62577
99,88568	0,28445	230	70,2460	56,19876	47,62899
99,89124	0,27164	231	70,2651	56,20845	47,63207
99,89655	0,25935	232	70,2828	56,21777	47,63502
99,90162	0,24756	233	70,3012	56,22672	47,63783
99,90646	0,23627	234	70,3183	56,23529	47,64051
99,91107	0,22544	235	70,3347	56,24354	47,64306
99,91548	0,21507	236	70,3512	56,25143	47,64551
99,91968	0,20513	237	70,3654	56,25902	47,64783
99,92369	0,19562	238	70,3804	56,26628	47,65006
99,92751	0,18651	239	70,3946	56,27324	47,65217
99,93115	0,17778	240	70,4081	56,27993	47,65419
99,93462	0,16943	241	70,4212	56,28633	47,65611
99,93793	0,16144	242	70,4337	56,29246	47,65795
99,94108	0,15380	243	70,4458	56,29833	47,65969
99,94408	0,14649	244	70,4573	56,30396	47,66136
99,94694	0,13950	245	70,4685	56,30934	47,66294
99,94966	0,13282	246	70,4791	56,31449	47,66445
99,95226	0,12643	247	70,4894	56,31942	47,66589
99,95472	0,12032	248	70,4993	56,32414	47,66725
99,95707	0,11449	249	70,5087	56,32865	47,66855
99,95930	0,10891	250	70,5178	56,33298	47,66979

Gaußsche Fehlerfunktionen

100 Φ hv	100 φ hv/h	100 hv	100 mh	100 dh	100 rh
99,95930	0,10891	250	70,5178	56,33298	47,66979
99,96143	0,10359	251	70,5265	56,33710	47,67097
99,96345	0,09851	252	70,5348	56,34104	47,67209
99,96537	0,09366	253	70,5428	56,34481	47,67315
99,96720	0,08903	254	70,5505	56,34841	47,67417
99,96893	0,08461	255	70,5586	56,35186	47,67513
99,97058	0,08040	256	70,5649	56,35514	47,67604
99,97215	0,07638	257	70,5717	56,35828	47,67691
99,97364	0,07254	258	70,5782	56,36128	47,67774
99,97505	0,06889	259	70,5844	56,36413	47,67852
99,97640	0,06540	260	70,5903	56,36686	47,67927
99,97767	0,06208	261	70,5960	56,36947	47,67997
99,97888	0,05892	262	70,6014	56,37195	47,68064
99,98003	0,05591	263	70,6066	56,37431	47,68128
99,98112	0,05304	264	70,6116	56,37656	47,68188
99,98215	0,05030	265	70,6163	56,37872	47,68245
99,98313	0,04770	266	70,6209	56,38077	47,68300
99,98406	0,04523	267	70,6252	56,38272	47,68351
99,98494	0,04287	268	70,6294	56,38458	47,68400
99,98578	0,04063	269	70,6333	56,38635	47,68446
99,98657	0,03850	270	70,6371	56,38803	47,68490
99,98732	0,03647	271	70,6407	56,38964	47,68532
99,98802	0,03454	272	70,6442	56,39118	47,68571
99,98870	0,03271	273	70,6475	56,39262	47,68608
99,98933	0,03097	274	70,6506	56,39401	47,68642
99,98994	0,02931	275	70,6536	56,39532	47,68677

100 Φ hv	100 φ hv/h	100 hv	100 mh	100 dh	100 rh
99,99051	0,02774	276	70,6565	56,39657	47,68709
99,99105	0,02625	277	70,6592	56,39776	47,68739
99,99156	0,02483	278	70,6618	56,39889	47,68767
99,99204	0,02349	279	70,6643	56,39996	47,68794
99,99250	0,02221	280	70,6667	56,40098	47,68819
99,99293	0,02100	281	70,6689	56,40195	47,68843
99,99334	0,01985	282	70,6711	56,40287	47,68866
99,99372	0,01876	283	70,6731	56,40374	47,68887
99,99409	0,01772	284	70,6750	56,40447	47,68907
99,99443	0,01674	285	70,6769	56,40536	47,68926
99,99476	0,01582	286	70,6786	56,40608	47,68944
99,99507	0,01493	287	70,6803	56,40681	47,68961
99,99536	0,01410	288	70,6819	56,40748	47,68978
99,99563	0,01331	289	70,6835	56,40812	47,68993
99,99589	0,01256	290	70,6849	56,40872	47,69007
99,99613	0,01185	291	70,6863	56,40929	47,69020
99,99636	0,01118	292	70,6876	56,40983	47,69033
99,99658	0,01055	293	70,6888	56,41034	47,69045
99,99679	0,00994	294	70,6900	56,41083	47,69057
99,99698	0,00938	295	70,6912	56,41128	47,69067
99,99716	0,00884	296	70,6922	56,41172	47,69077
99,99733	0,00833	297	70,6932	56,41214	47,69087
99,99750	0,00785	298	70,6941	56,41252	47,69096
99,99765	0,00739	299	70,6950	56,41290	47,69104
99,99779	0,00696	300	70,6959	56,41325	47,69112
100,00000	0,00000	∞	70,71067812	56,41895835	47,69360

Differentialquotienten und unbestimmte Integrale der Elementarfunktionen des Mathema-Stabes

$f'(x)$	$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
mx^{m-1}	x^m	$x^{m+1}/(m+1) + C$
$-x/\sqrt{1-x^2}$	$\sqrt{1-x^2}$	$0{,}5\,x\sqrt{1-x^2} + 0{,}5 \text{ arcsin } x + C$
$x/\sqrt{1+x^2}$	$\sqrt{1+x^2}$	$0{,}5\,x\sqrt{1+x^2} + 0{,}5 \text{ arsinh } x + C$
$x/\sqrt{x^2-1}$	$\sqrt{x^2-1}$	$0{,}5\,x\sqrt{x^2-1} - 0{,}5 \text{ arcosh } x + C$
e^x	e^x	$e^x + C$
$1/x$	$\ln x$	$x \ln x - x + C$
$\cos x$	$\sin x$	$-\cos x + C$
$-\sin x$	$\cos x$	$\sin x + C$
$\sec^2 x$	$\tan x$	$-\ln \cos x + C$
$-\text{cosec}^2 x$	$\cot x$	$\ln \sin x + C$
$\sin x/\cos^2 x$	$\sec x$	$\ln\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}} + C = \ln \tan(\pi/4 + x/2) + C = \text{ar amp } x + C$
$-\cos x/\sin^2 x$	$\text{cosec } x$	$-\ln\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}} + C$
$1/\sqrt{1-x^2}$	$\arcsin x$	$x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$
$-1/\sqrt{1-x^2}$	$\arccos x$	$x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$
$1/(1+x^2)$	$\arctan x$	$x \arctan x - \ln\sqrt{1+x^2} + C$
$-1/(1+x^2)$	$\text{arccot } x$	$x \text{ arccot } x + \ln\sqrt{1+x^2} + C$
$\cosh x$	$\sinh x$	$\cosh x + C$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\sinh x + C$
$\text{sech}^2 x$	$\tanh x$	$\ln \cosh x + C$
$-\text{cosech}^2 x$	$\coth x$	$\ln \sinh x + C$
$-\sinh x/\cosh^2 x$	$\text{sech } x$	$2 \arctan e^x + C = \text{amp } x + \pi/2 + C$
$-\cosh x/\sinh^2 x$	$\text{cosech } x$	$-\ln\sqrt{\dfrac{\cosh x + 1}{\cosh x + 1}} + C$

$f'(x)$	$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$1/\sqrt{x^2+1}$	$\text{arsinh } x$	$x \text{ arsinh } x - \sqrt{x^2+1} + C$
$1/\sqrt{x^2-1}$	$\text{arcosh } x$	$x \text{ arcosh } x - \sqrt{x^2-1} + C$
$1/(1-x^2)$	$\text{artanh } x$	$x \text{ artanh } x + \ln\sqrt{1-x^2} + C$
$1/(1-x^2)$	$\text{arcoth } x$	$x \text{ arcoth } x + \ln\sqrt{x^2-1} + C$

Potenzreihen der reellen und der komplexen Elementarfunktionen (z=x+iy)

$$\sqrt{1+z} = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{0,5}{m} z^m = 1 + z/2 - z^2/8 + z^3/16 - z^4/25,6 + z^5/36,57143 - z^6/48,76190 + \ldots \qquad |z| < 1$$

$$\sqrt{z \pm 1} = \sqrt{z} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \binom{0,5}{m} / z^m = \sqrt{z}\,(1 \pm 1/2z - 1/8z^2 \pm 1/16z^3 - 1/25,6z^4 \pm 1/36,57143z^5 - \ldots) \qquad |z| > 1$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n! = 1 + z + z^2/2 + z^3/6 + z^4/24 + z^5/120 + z^6/720 + z^7/5040 + z^8/40320 + \ldots \qquad |z| < \infty$$

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} z^n/n = z - z^2/2 + z^3/3 - z^4/4 + z^5/5 - z^6/6 + z^7/7 - z^8/8 + z^9/9 - z^{10}/10 + \ldots \qquad |z| < 1$$

$$\begin{matrix}\sin z\\ \sinh z\end{matrix} = \sum_{n=0}^{\infty} (\mp 1)^n z^{2n+1}/(2n+1)! = z \mp z^3/6 + z^5/120 \mp z^7/5040 + z^9/362880 \mp z^{11}/39\,916880 + \ldots \qquad |z| < \infty$$

$$\begin{matrix}\cos z\\ \cosh z\end{matrix} = \sum_{n=0}^{\infty} (\mp 1)^n z^{2n}/(2n)! = 1 \mp z^2/2 + z^4/24 \mp z^6/720 + z^8/40320 \mp z^{10}/3\,628800 \mp z^{12}/\,479\,001\,600 \mp \ldots \qquad |z| < \infty$$

$$\begin{matrix}\tan z\\ \tanh z\end{matrix} = \sum_{n=1}^{\infty} (\mp 1)^{n-1} 2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n} z^{2n-1}/(2n)! = z \pm z^3/3 + z^5/7,5 \pm z^7/18,52941 + z^9/45,72581 \pm z^{11}/112,82562 + \ldots \qquad |z| < \pi/2$$

$$\begin{matrix}\cot z\\ \coth z\end{matrix} = \sum_{n=0}^{\infty} (\mp 1)^n 2^{2n} B_{2n} z^{2n-1}/(2n)! = 1/z \mp z/3 - z^3/45 \mp z^5/472,5 - z^7/4725 \mp z^9/46777,5 - z^{11}/462020,9 \mp \ldots \qquad |z| < \pi$$

$$\begin{matrix}\sec z\\ \operatorname{sech} z\end{matrix} = \sum_{n=0}^{\infty} (\mp 1)^n E_{2n} z^{2n}/(2n)! = 1 \pm z^2/2 + z^4/4{,}8 \pm z^6/11{,}80328 + z^8/29{,}11191 \pm z^{10}/71{,}82756 + \ldots \qquad |z| < \pi/2$$

$$\begin{matrix}\operatorname{cosec} z\\ \operatorname{cosech} z\end{matrix} = -\sum_{n=0}^{\infty} (\mp 1)^n (2^{2n}-2) B_{2n} z^{2n-1}/(2n)! = 1/z \pm z/6 + z^3/51{,}42857 \pm z^5/487{,}74193 + z^7/4762{,}20472 \pm \ldots \qquad |z| <$$

$$\begin{matrix}\arcsin z\\ \operatorname{arsinh} z\end{matrix} = z + \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n (2n-1)!!z^{2n+1}/(2n+1)\,(2n)!! = z \pm z^3/6 + z^5/13{,}33333 \pm z^7/22{,}4 + z^9/32{,}91429 \pm z^{11}/44{,}69841 + \ldots \qquad |z| < 1$$

$$\arccos z = \pi/2 - \arcsin z$$

$$\operatorname{arcosh} z = \ln 2z - \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)!!/(n \cdot 2^{2n+1} n! z^{2n}) = \ln 2z - 1/4z^2 - 1/10{,}66667z^4 - 1/19{,}2z^6 - 1/29{,}25714z^8 - \ldots \qquad |z| > 1$$

$$\begin{matrix}\arctan z\\ \operatorname{artanh} z\end{matrix} = \sum_{n=0}^{\infty} (\mp 1)^n z^{2n+1}/(2n+1) = z \mp z^3/3 + z^5/5 \mp z^7/7 + z^9/9 \mp z^{11}/11 + z^{13}/13 \mp z^{15}/15 \ldots \qquad |z| < 1$$

$\operatorname{arccot} z = \arctan {}^1/_z$
$\operatorname{arcoth} z = \operatorname{artanh} {}^1/_z$

$\operatorname{arcsec} z = \arccos {}^1/_z$
$\operatorname{arsech} z = \operatorname{arcosh} {}^1/_z$

$\operatorname{arccosec} z = \arcsin {}^1/_z$
$\operatorname{arcosech} z = \operatorname{arsinh} {}^1/_z$

$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n$
$(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)$

Die Beschränkung auf die ersten Glieder der Potenzreihen ergeben Näherungsformeln für die Funktionen bei kleinen bzw. großen Argumenten.

Reihenkoeffizienten

n	2^n	n!	1·3·5..(2n-1)=(2n-1)!!	2·4·6 . .2n=2^nn!=2n!!
1	2	1	1	2
2	4	2	3	8
3	8	6	15	48
4	16	24	105	384
5	32	120	945	3840
6	64	720	10395	46080
7	128	5040	135135	645120
8	256	40320	2 027025	10 321920
9	512	362880	34 459425	185 794560
10	1024	3 628800	654 729075	3715 891200
11	2048	39 916800	13749 310575	81749 606400
12	4096	479 001600	316234 143225	1 961990 553600
13	8192	6227 020800	7 905853 580625	51 011754 393600
14	16384	87178 291200	213 458046 676875	1428 329123 020800
15	32768	1 307674 368000	6190 283353 609375	42849 873690 624000
16	65536	20 922789 888000	191898 783961 890625	1 371195 958099 968000
⋮		$\frac{n+0,0464}{n-0,0369}\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$	$\frac{n-0,01223}{n+0,02945}\sqrt{2}\left(\frac{2n}{e}\right)^n$	$\frac{n+0,04810}{n-0,03525}\sqrt{2\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^n$

n	$\frac{n!}{1\cdot 3\ldots(2n-1)}$	$\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2^n\, n!}$	$\frac{2^n\, n}{1\cdot 3\ldots(2n+1)}$	$1+{}^1/_2+{}^1/_3+\ldots+{}^1/_n$	B: $B_o = 1$	E; $E_o = 1$
1	1,00000000	0,50000000	0,66666667	1,00000000	—1/2	0
2	0,66666667	0,37500000	0,53333333	1,50000000	1/6	—1
3	0,40000000	0,31250000	0,45714286	1,83333333	0	0
4	0,22857143	0,27343750	0,40634921	2,08333333	—1/30	5
5	0,12698413	0,24609375	0,36940837	2,28333333	0	0
6	0,06926407	0,22558594	0,34099234	2,45000000	1/42	—61
7	0,03729604	0,20947266	0,31825952	2,59285714	0	0
8	0,01989122	0,19638061	0,29953837	2,71785714	—1/30	1385
9	0,01053065	0,18547058	0,28377319	2,82896825	0	0
10	0,00554245	0,17619705	0,27026018	2,92896825	5/66	—50521
11	0,00290319	0,16818810	0,25850974	3,01987734	0	0
12	0,00151471	0,16118026	0,24816935	3,10321068	—691/2730	2 702765
13	0,00078765	0,15498102	0,23897789	3,18013376	0	0
14	0,00040841	0,14944598	0,23073728	3,25156233	7/6	—199 360981
15	0,00021125	0,14446445	0,22329414	3,31822899	0	0
16	0,00010903	0,13994993	0,21652765	3,38072899	—3617/510	19391 512145
⋮	$\frac{n+0,0679}{n-0,0571}\,\frac{\sqrt{\pi n}}{2^n}$	$\frac{n-0,0549}{n-0,0701}\,\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$	$\frac{n+0,1453}{n+0,5203}\sqrt{\frac{\pi}{4n}}$	$\frac{0,50006}{n+0,170} + \ln n + C$ C=0,577215665	$B^n = (B+1)^n$ $B^n \equiv B_n$	$(E+1)^n + (E-1)^n = 0$ $E^n \equiv E_n$

Die Korrektionsglieder der asymptotischen Ausdrücke für $n \longrightarrow \infty$ sind für n = 15 und n = 16 berechnet und gelten für größere Werte von n mit guter Genauigkeit.

Binomialkoeffizienten

$$(1+z)^n = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{n}{m} z^m = 1 + \binom{n}{1} z + \binom{n}{2} z^2 + \binom{n}{3} z^3 + \ldots \quad |z| < 1; \quad \binom{n}{m} = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,(n-m+1)}{1\,\cdot\,2\,\cdot\,3\,\ldots\,m}; \quad \binom{n}{0} = 1; \quad \binom{n}{1} = n$$

$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\binom{n}{7}$	$\binom{n}{8}$
1							
2	1						
3	3	1					
4	6	4	1				
5	10	10	5	1			
6	15	20	15	6	1		
7	21	35	35	21	7	1	
8	28	56	70	56	28	8	5
9	36	84	126	126	84	36	9
10	45	120	210	252	210	120	45
11	55	165	330	462	462	330	165
12	66	220	495	792	924	792	495
13	78	286	715	1287	1716	1716	1287
14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003
15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435
16	120	560	182	4368	8008	11440	12870
—1	1	—1	1	—1	1	—1	1
—2	3	—4	5	—6	7	—8	9
—3	6	—10	15	—21	28	—36	45
—4	10	—20	35	—56	84	—120	165
—5	15	—35	70	—126	210	—330	495
0,50000000	—0,12500000	0,06250000	—0,03906250	0,02734375	—0,02050781	0,01611328	—0,01309204
1,50000000	0,37500000	—0,06250000	0,02343750	—0,01171875	0,00683594	—0,00439453	0,00302124
2,50000000	1,87500000	0,31250000	—0,03906250	0,01171875	—0,00488281	0,00244141	—0,00137329
3,50000000	4,37500000	2,18750000	0,27343750	—0,02734375	0,00683594	—0,00244141	0,00106812
—0,50000000	0,37500000	—0,31250000	0,27343750	—0,24609375	0,22558594	—0,20947266	0,19638062
—1,50000000	1,87500000	—2,18750000	2,46093750	—2,70703125	2,93261719	—3,14208984	3,33847046
—2,50000000	4,37500000	—6,56250000	9,02343750	—11,7304687	14,6630859	—17,8051758	21,1436462
—3,50000000	7,87500000	—14,4375000	23,4609375	—35,1914062	49,8544922	—67,6596680	88,8033142
0,33333333	—0,11111111	0,06172840	—0,04115226	0,03017833	—0,02347203	0,01900117	—0,01583431
0,66666667	—0,11111111	0,04938272	—0,02880658	0,01920439	—0,01386984	0,01056749	—0,00836593
1,33333333	0,22222222	—0,04938272	0,02057613	—0,01097394	0,00670629	—0,00447086	0,00253349
1,66666667	0,55555556	—0,06172840	0,02057613	—0,00960219	0,00533455	—0,00330234	0,00220156
—0,33333333	0,22222222	—0,13580247	0,14403292	—0,12482854	0,11095870	—0,10039120	0,09202527
—0,66666667	0,55555556	—0,49382716	0,45267490	—0,42249657	0,39750038	—0,38002337	0,36418906
—1,33333333	1,55555556	—1,72839562	1,87242798	—1,99725652	2,10821521	—2,20860641	2,30063168
—1,66666667	2,22222222	—2,71604938	3,16872428	—3,59122085	3,99024539	—4,37026876	4,73445782
0,25000000	—0,09375000	0,05468750	—0,03759766	0,02819824	—0,02232361	0,02215195	—0,01869071
0,75000000	—0,09375000	0,03906250	—0,02197266	0,01428223	—0,01011658	0,00758745	—0,00592768
1,25000000	0,15625000	—0,03906250	0,01708984	—0,00939941	0,00587463	—0,00398636	0,00286520
—0,25000000	0,15625000	—0,11718750	0,09521484	—0,08093262	0,07081604	—0,06322861	0,05730093
—0,75000000	0,65625000	—0,60156250	0,56396484	—0,53576660	0,51344299	—0,49510574	0,47963369
—1,25000000	1,40625000	—1,52343750	1,61865234	—1,69958496	1,77040100	—1,83362968	1,89093053

Komplexe Funktionen, konforme Abbildungen und ebene orthogonale Koordinatensysteme

$z = x + iy$

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\varphi = \arg z = \arctan y/x \pm 2\pi m$

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r\,e^{i\varphi} = r\,i^{2\varphi/\pi}$ (Euler)

$e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$

$\sin\varphi = (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})/2i$

$\cos\varphi = (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})/2$

$\sin ix = i\sinh x$

$\cos ix = \cosh x$

$\tan ix = i\tanh x$

$\cot ix = -i\coth x$

$\sin z = \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y$

$\cos z = \cos x\cosh y - i\sin x\sinh y$

$\tan z = \dfrac{\sin 2x + i\sinh 2y}{\cos 2x + \cosh 2y}$

$\cot z = \dfrac{\sin 2x - i\sinh 2y}{-\cos 2x + \cosh 2y}$

$x = |z|\cos\varphi$

$y = |z|\sin\varphi$

$m =$ ganze Zahl

$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r^n e^{in\varphi} = r^n i^{2n\varphi/\pi}$ (Moivre)

$\ln z = \ln|z| + i\varphi$

$\operatorname{Ln} z = (\ln z)_{m=0}$

$\sinh ix = i\sin x$

$\cosh ix = \cos x$

$\tanh ix = i\tan x$

$\coth ix = -i\cot x$

$\sinh z = \sinh x\cos y + i\cosh x\sin y$

$\cosh z = \cosh x\cos y + i\sinh x\sin y$

$\tanh z = \dfrac{\sinh 2x + i\sin 2y}{\cosh 2x + \cos 2y}$

$\coth z = \dfrac{\sinh 2x - i\sin 2y}{\cosh 2x - \cos 2y}$

$$\operatorname{arcsin} iz = i \operatorname{arsinh} z = i \ln (z + \sqrt{1+z^2})$$

$$\operatorname{arccos} iz = -i \operatorname{arcosh} iz = \pm i \ln (z + \sqrt{1+z^2}) + \pi/2$$

$$\operatorname{arctan} iz = i \operatorname{artanh} z = i \ln\sqrt{\frac{1+z}{1-z}}$$

$$\operatorname{arccot} iz = -i \operatorname{arcoth} z = -i \ln\sqrt{\frac{z+1}{z-1}}$$

$$\operatorname{arcsin} z = -i \operatorname{arsinh} iz = -i \ln (iz + \sqrt{1-z^2})$$

$$\operatorname{arccos} z = -i \operatorname{arcosh} z = \pm i \ln (z + i\sqrt{1-z^2})$$

$$\operatorname{arctan} z = -i \operatorname{artanh} iz = -i \ln\sqrt{\frac{1+iz}{1-iz}}$$

$$\operatorname{arccot} z = i \operatorname{arcoth} iz = -i \ln\sqrt{\frac{iz-1}{iz+1}}$$

Für eine **analytische Funktion** $Z = f(z) = X(x, y) + iY(x, y)$ gelten die **Cauchy-Riemann**sche Differentialgleichung

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} \qquad \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x}$$

und die **Laplace**sche Potentialgleichung

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0.$$

Eine analytische Funktion $Z=f(z)$ vermittelt zu einer Kurve der z-Ebene eine **konforme Abbildung** in der Z-Ebene und umgekehrt.

X (x, y) und Y (x, y) sind harmonische Funktionen.

Die konforme Abbildung eines orthogonalen Koordinatennetzes ergibt wieder ein orthogonales Koordinatennetz.

Parabolische Koordinaten

$Z = z^2$

Die Z-Ebene hat zwei **Riemannsche Flächen** mit den **Verzweigungspunkten** $Z = 0$ und $Z = \infty$; in diesen **singulären Punkten** ist $f'(Z) = 0$ oder $= \infty$.

$X + iY = x^2 - y^2 + 2ixy$

$Y_1 = 2y\sqrt{y^2 + X}$, konfokale Parabeln für $y = c$.

$Y_2 = 2x\sqrt{x^2 - X}$, konfokale Parabeln für $x = c$.

$Re^{i\psi} = r^2 e^{2i\varphi}$, Polarkoordinaten mit verdoppeltem Argument.

$z = \sqrt{Z}$

$x + iy = \sqrt{(R + X)/2} + i\sqrt{(R - X)/2}$

$y_1 = Y/2x$, gleichseitige Hyperbeln für $Y = c$.

$y_2 = \sqrt{x^2 - X}$, gleichseitige Hyperbeln für $X = c$.

$re^{i\varphi} = \sqrt{R}\, e^{\psi/2}$, Polarkoordinaten mit halbiertem Argument.

Polarkoordinaten

$Z = e^z$

Den 4 Parallelstreifen von der Breite $\pi/2$ für $y = 0$ bis $y = 2\pi$ der z-Ebene entsprechen die 4 Quadranten der Z-Ebene, die unendlich viele Riemannsche Flächen hat.

$X + iY = e^x \cos y + i\, e^x \sin y$

$Y_1 = X \tan y$, Geraden durch den Nullpunkt für $y = c$.

$Y_2 = \sqrt{e^{2x} - X^2}$, Kreise um den Nullpunkt für $x = c$.

$Re^{i\psi} = e^x \cdot e^{iy}$

$R = e^x$

$\psi = y$

$z = \ln Z$

$x + iy = \ln R + i\varphi$

$y_1 = \arcsin Ye^{-X} + 2\pi m$

$y_2 = \arccos Xe^{-x} + 2\pi m$

$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \ln R + i\psi$

$r = \sqrt{(\ln R)^2 + \psi^2}$

$\varphi = \arccos((\ln R)/r)$

Transformation durch reziproke Radien, Inversion

$Z = 1/z$

$z = 1/Z$

$X + iY = x/r^2 - iy/r^2$

$Y_1 = -1/2y + \sqrt{1/4y^2 - X^2}$, Kreisbüschel für $y = c$, die reelle Achse berührend; **Dipol.**

$Y_2 = +\sqrt{X/x - X^2}$, Kreisbüschel für $x = c$, die imaginare Achse berührend; **Dipol.**

$Re^{i\psi} = 1/re^{i\varphi}$

$R = 1/r$, Spiegelung am Einheitskreis.

$\psi = -\varphi$, Spiegelung an der reellen Achse.

Elliptische Koordinaten

Konfokale Ellipsen und konfokale Hyperbeln mit den Brennpunkten in $Z = \pm 1$ bzw. $Z = \pm i$.

$Z = \sin z;$	$X^2/\cosh^2 y + Y^2/\sinh^2 y = 1;$	$X^2/\sin^2 x - Y^2/\cos^2 x = 1.$
$Z = \cos z;$	$X^2/\cosh^2 y + Y^2/\sinh^2 y = 1;$	$X^2/\cos^2 x - Y^2/\sin^2 x = 1.$
$Z = \sinh z;$	$-X^2/\cos^2 y + Y^2/\sin^2 y = 1;$	$X^2/\sinh^2 x + Y^2/\cosh^2 x = 1.$
$Z = \cosh z;$	$X^2/\cos^2 y - Y^2/\sin^2 y = 1;$	$X^2/\cosh^2 x + Y^2/\sinh^2 x = 1.$

Die Bilder der Koordinaten für $Z = \sin z$, $\cos z$ und $\cosh z$ stimmen miteinander überein (Brennpunkte in $Z = \pm 1$), die der Koordinaten für $Z = \sinh z$ sind hiergegen um 1∟ gedreht.

Überlagerung des kartesischen und des reziproken Netzes, Dipol im geraden Strom

$Z = z + 1/z;\ iZ = iz - 1/iz$ $\qquad\qquad z = 0{,}5\ Z \pm \sqrt{0{,}25\ Z^2 - 1}$

$$X + iY = x + x/r^2 + i\,(y - y/r^2)$$
$$= (r + 1/r)\cos\varphi + i\,(r - 1/r)\sin\varphi$$

Die kartesischen Koordinaten der z-Ebene ergeben in der Z-Ebene das Bild der Strömung um den Einheitskreis (Strömungslinien und Äquipotentiallinien), ebenso das Bild der Strömung im Einheitskreis.

Der Einheitskreis der z-Ebene geht in die Gerade von $X = -2$ bis $X = +2$ der Z-Ebene über.

Die anderen Kreise um den Nullpunkt der z-Ebene ergeben konfokale Ellipsen in der Z-Ebene mit den Brennpunkten in $X = \pm 2$, während aus den Geraden durch den Nullpunkt der z-Ebene konfokale Hyperbeln in der Z-Ebene mit den genannten Brennpunkten werden.

Kreise durch die Punkte $z = \pm 1$ gehen in Kreisbogen der Z-Ebene über.

Kreise durch den Punkt $z = -1$ mit dem Punkt $z = +1$ in seinem Innern gehen in Joukowski-Tragflügelprofile über.

Quelle und Senke gleicher Stärke, Bipolarkoordinaten

$Z = \tanh z/2$ $\qquad$ $z = \ln(Z+1) - \ln(Z-1) = \ln \dfrac{Z+1}{Z-1}$

$Z = \coth z/2$ $\qquad$ $z = \ln(1+Z) - \ln(1-Z) = \ln \dfrac{1+Z}{1-Z}$

$R_1 = |\operatorname{cosec} y|$, Kreisbüschel für $y = c$ um $X = 0$, $Y = \pm \cot y$ durch die Pole $X = \pm 1$.
$R_2 = |\operatorname{cosech} x|$, apollonische Kreisbündel für $x = c$ um $X = \pm \coth x$, $Y = 0$.

$Z = \tan z/2$ $\qquad$ $z = -i \ln(1+iZ) + i \ln(1-iZ) = -i \ln \dfrac{1+iZ}{1-iZ}$

$Z = \cot z/2$ $\qquad$ $z = -i \ln(iZ-1) + i \ln(iZ+1) = i \ln \dfrac{iZ+1}{iZ-1}$

$R_1 = |\operatorname{cosech} y|$, apollonische Kreisbündel für $y = c$ um $X = 0$, $Y = \pm \coth y$.
$R_2 = |\operatorname{cosec} x|$, Kreisbüschel für $x = c$ um $X = + \cot y$, $Y = 0$ durch die Pole $Y = \pm 1$.

Zwei Quellen oder Senken gleicher Stärke

$Z = \sqrt{e^z + 1}$

$$z = \ln(Z-1) + \ln(Z+1) = \ln(Z^2-1)$$
$$x = 0{,}5 \ln(R^4 - 2 R^2 \cos 2\psi + 1)$$
$$y = \arctan \frac{\sin 2\psi}{\cos 2\psi - 1/R^2}$$

Die Parallelen zur reellen Achse in der z-Ebene werden zu Hyperbeln in der Z-Ebene; sie gehen durch die Pole $X = \pm 1$, ihre Asymptoten durch den Nullpunkt.

Die Parallelen zur imaginären Achse in der z-Ebene werden zu konfokalen **Cassini**-Kurven in der Z-Ebene mit den Brennpunkten in $X = \pm 1$; insbesondere geht die imaginäre Achse der z-Ebene in die **Lemniskate** der Z-Ebene über gemäß der Gleichung $R = \sqrt{2 \cos 2\psi}$.

FABER-CASTELL

Wer mit FABER-CASTELL arbeitet

bleibt dabei

1/784 d